Introduction

En mathématiques, le calcul fractionnaire est une branche de l'analyse, qui étudie la généralisation de la dérivation et d'intégration d'ordre entier n (ordinaire) à l'ordre non entier (fractionnaire). La théorie de la dérivation fractionnaire est un sujet presque aussi ancien que le calcul classique que nous le connaissons aujourd'hui, ces origines remontent à la fin du $17^{ème}$ siècle, l'époque où Isaac Newton et Gottfried Wihelm Leibniz ont développé les fondements du calcul différentiel et intégral. En particulier, Leibniz a introduit le symbole $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ pour désigner la dérivée $n^{ème}$ d'une fonction f quand il a annoncé dans une lettre à Guillaume l'Hôpital datée du 30 septembre 1695, avec l'hypothèse implicite que $n \in \mathbb{N}$, l'Hôpital a répondu : Que signifie $\dfrac{d^n f}{dx^n}$ si $n = \dfrac{1}{2}$?. Leibniz lui a repondu : "Cela conduirait à un paradoxe à partir duquel un jour, on pourra tirer des conséquences utiles. Cette lettre de l'Hôpital, est aujourd'hui admise comme le premier incident de ce que nous appelons la dérivation fractionnaire, et le fait que l'Hôpital a demandé spécifiquement pour $n = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire une fraction (nombre rationnel), a en fait donné lieu au nom de ce domaine des mathématiques.

Les systèmes décrits par des modèles d'ordre fractionnaires, utilisant des équations différentielles fractionnaires basées sur la dérivée non entière ont suscité l'intérêt de la communauté scientifique. Les ingénieurs ont seulement compris l'importance des équations différentielles d'ordre non entier, que durant les trois dernières décennies, surtout lorsqu'ils ont observé que la description de quelques systèmes est plus exacte, que lorsque la dérivée fractionnaire est utilisée. Le mérite de la première conférence est attribué à B. Ross qui a organisé cette conférence à l'université de New Haven en juin 1974 sous le titre "Le calcul fractionnaire et ses applications". Pour la première étude, un autre mérite est attribué à K. B. Oldham et J. Spanier qui ont publié un livre en 1974 après une collaboration commune, commencé en 1968 et consacré à la présentation des méthodes et applications du calcul fractionnaire en la physique et en ingénierie. Depuis, le calcul fractionnaire a gagné une popularité et une considération importante dû principalement aux nombreuses applications dans divers domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie où il a été remarqué que le comportement d'un grand nombre de systèmes physiques peut être décrit en utilisant la dérivée d'ordre fractionnaire qui fournit un excellent instrument pour la description de plusieurs propriétés de matériaux et processus.

Au cours des dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont attiré l'attention beaucoup de chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans de nombreux domaines de la physique, de la mécanique des fluides, de l'électrochimi, de la viscoélasticité , de la théorie du contrôle non-linéaire, des systèmes biologiques non-linéaires, de l'hydrodynamique et d'autres domaines des sciences et de l'ingénierie. Dans tous ces domaines scientifiques, il est important de trouver des solutions exactes ou approximatives à ces problèmes. Il existe donc un intérêt marqué pour le développement de méthodes de résolution de problèmes liés aux équations aux dérivées partielles non-linéaires d'ordre fractionnaire. Les solutions exactes de ces problèmes sont parfois trop compliquées à atteindre par les techniques classiques en raison de la complexité des parties non-linéaires les impliquant.

L'objectif principal de ce cours est :

1) Application les notions de base du calcul fractionnaire en concevant une recherche de fonctions spéciales.

2) Réalisation d'une étude sur les intégrales et les dérivées fractionnaires.

3) L'utilisation ces notions pour étudier les solutions d'équations différentielles fractionnaires.

Ce cours est organisé comme suit : dans le premier chapitre, nous présentons certaines théories de base qui concernent des fonctions utiles qui sont utilisées dans les autres chapitres. Nous donnons ici les définitions des fonctions Gamma, Bêta et la fonction de Mittag-Leffler. Ces fonctions jouent un rôle très importent dans la théorie des équations différentielles fractionnaires.

Le deuxième chapitre est consacré aux définitions élémentaires pour les intégrales et les dérivées fractionnaires au sens de Riemann-Liouville, de Caputo et de Grünwald-Letnikov.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème de Cauchy pour une équation différentielle non-linéaire avec dérivée fractionnaire de Caputo. On démontre un résultat d'équivalence entre ce problème et une équation intégrale de Volterra non-linéaire dans l'espace de fonctions continuellement différentiables. Sur la base de ce résultat, l'existence et l'unicité de la solution du problème de Cauchy considéré sont prouvées.

On termine ce cours avec quelques références qui ont été utilisées.