Chapitre 1

Les espaces L^p

Un espace L^p est un espace vectoriel de classes des fonctions dont la puissance d'exposant p est intégrable au sens de Lebesgue, où p est un nombre réel strictement positif. Le passage à la limite de l'exposant aboutit à la construction des espaces L^∞ des fonctions bornées. Les espaces L^p sont appelés espaces de Lebesgue.
Cet espace constituent un outil fondamental de l'analyse fonctionnelle en permettant la résolution d'équations par approximation avec des solutions non nécessairement dérivables ni même continues. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivants [11, 6, 1, 3, 2, 9, 10].

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue $d\mu$. On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la norme :

$$\|f\|_{L^1} = \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Quand il n'y aura pas d'ambiguité on écrira souvent L^1 au lieu de $L^1(\Omega)$ et $\int f$ au lieu de $\int_\Omega f(x)dx$. Comme d'habitude on identifie deux fonctions de L^1 qui coïncident p.p. = presque partout (= sauf sur un ensemble négligeable).

1.1 Quelques résultats d'intégration

Dans cette section, on rappelle quelques définitions et théorèmes, sans démonstrations, qui seront utiles dans la suite.

Théorème 1.1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo Levi) *Soit* (f_n) *une suite croissante de fonctions de* L^1 *telle que* $\sup_n \int f_n < \infty$.
Alors $f_n(x)$ *converge p.p. sur* Ω *vers une limite finie notée* $f(x)$; *de plus* $f \in L^1$ *et*

$$\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0.$$

Théorème 1.1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* L^1. *On suppose que*

a) $f_n(x) \to f(x)$ *p.p. sur* Ω.

b) *Il existe une fonction* $g \in L^1$ *telle que pour chaque* n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ *p.p. sur* Ω .

Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et* $\|f_n - f\|_{L^1} \longrightarrow 0$.

Lemme 1.1.1 (Lemme de Fatou) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions de* L^1 *telle que*

1. *Pour chaque* n, $f_n(x) \geq 0$ *p.p. sur* Ω
2. $\sup_n \int f_n < \infty$.

Pour chaque $x \in \Omega$ *on pose* $f(x) = \lim_{n\to\infty} \inf f_n(x)$.
Alors $f \in L^1(\Omega)$ *et*

$$\int f(x) \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int f_n.$$

Notation. On désigne par $C_c(\Omega)$ l'espace des fonctions continues sur Ω à support compact, c'est-à-dire $C_c(\Omega) = \{f \in C(\Omega); f(x) = 0 \ \ \forall x \in \Omega \backslash K \ \ ou \ \ K \subset \Omega \ \ est \ \ un \ \ compact\}$.

Théorème 1.1.3 (Théorème de densité) *L'espace* $C_c(\Omega)$ *est dense dans* $L^1(\Omega)$; *c'est-à-dire*

$$\forall f \in L^1(\Omega) \ \ et \ \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists f_1 \in C_c(\Omega) \ \ tel \ que \ \ \|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon.$$

Ensuite, nous présentons deux théorèmes qui sont utilisés dans la suite.
Soient $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^n$, $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et soit $F : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

Théorème 1.1.4 (Tonelli) *On suppose que*

$$\int_{\Omega_1} |F(x,y)|dy < \infty \ \ pour \ \ presque \ \ tout \ x \in \Omega_1$$

et que

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} |F(x,y)|dy < \infty.$$

Alors $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$.

Théorème 1.1.5 (Fubini) *On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Alors, pour presque tout $x \in \Omega_1$,*

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.2 Les espaces L^p : définitions et propriétés

Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des espaces L^p.

Définition 1.2.1 *Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$. On appelle espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ \ f \ \ mesurable \ \ et \ \ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}$$

Définition 1.2.2 *L'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est défini par*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \ mesurable\ et\ \exists\ une\ constante\ C\ telle\ que\ |f(x)| \leq C\ p.p.\ sur\ \Omega.\}$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, on pose

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C\ ;\ |f(x)| \leq C\ p.p.\ sur\ \Omega\}$$

Remarque 1.2.1 *Si $f \in L^\infty$ on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}\ p.p.\ sur\ \Omega.$$

En effet il existe une suite C_n telle que $C_n \to \|f\|_{L^\infty}$ et pour chaque n, $|f(x)| \leq C_n$ p.p. sur Ω. Donc $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega\backslash E_n$ avec E_n négligeable. On pose $E = \bigcup_n E_n$ de sorte que E est négligeable et l'on a $|f(x)| \leq C_n$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega\backslash E$. Par conséquent $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ pour tout $x \in \Omega\backslash E$.