Théorème 1.1.5 (Fubini) *On suppose que* $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$. *Alors, pour presque tout* $x \in \Omega_1$,

$$F(x,y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad et \quad \int_{\Omega_2} F(x,y)dy \in L^1_x(\Omega_1)$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x,y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad et \quad \int_{\Omega_1} F(x,y)dx \in L^1_y(\Omega_2)$$

De plus on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x,y)dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x,y)dx = \int\int_{\Omega_1\times\Omega_2} F(x,y)dxdy.$$

1.2 Les espaces L^p : définitions et propriétés

Dans cette section, nous allons présenter quelques définitions et propriétés des espaces L^p.

Définition 1.2.1 *Soit* $p \in \mathbb{R}$ *avec* $1 \leq p < \infty$. *On appelle espace de Lebesgue* $L^p(\Omega)$ *l'espace*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \ \ mesurable \ \ et \ \ |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

Pour toute fonction $f \in L^p(\Omega)$, *on pose*

$$\|f\|_{L^p} = \Big[\int_\Omega |f(x)|^p dx\Big]^{1/p}$$

Définition 1.2.2 *L'espace de Lebesgue* $L^\infty(\Omega)$ *est défini par*

$$L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{R};\ f \ mesurable \ et \ \exists \ une \ constante \ C \ telle \ que \ |f(x)| \leq C \ p.p. \ sur \ \Omega.\}$$

Pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$, *on pose*

$$\|f\|_{L^\infty} = \inf\{C \ ; \ |f(x)| \leq C \ p.p. \ sur \ \Omega\}$$

Remarque 1.2.1 *Si* $f \in L^\infty$ *on a*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} \ p.p. \ sur \ \Omega.$$

En effet il existe une suite C_n *telle que* $C_n \to \|f\|_{L^\infty}$ *et pour chaque* n, $|f(x)| \leq C_n$ *p.p. sur* Ω. *Donc* $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* $x \in \Omega\backslash E_n$ *avec* E_n *négligeable. On pose* $E = \bigcup_n E_n$ *de sorte que* E *est négligeable et l'on a* $|f(x)| \leq C_n$ *pour tout* n *et pour tout* $x \in \Omega\backslash E$. *Par conséquent* $|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$ *pour tout* $x \in \Omega\backslash E$.

Notation. Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Hölder) . *Soient $f \in L^p$ et $g \in L^q$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^p$ et*

$$\int |fg| \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \tag{1.1}$$

Preuve. La conclusion est évidente si $p = 1$ et si $p = \infty$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Rappelons l'**inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q, \quad \forall a \geq 0, \quad \forall b \geq 0 \tag{1.2}$$

la démonstration de (1.2) est évidente, par concavité de la fonction log sur $]0, \infty[$, nous avons pour a et b strictement positifs

$$\log \left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q \right) \geq \frac{1}{p} \log a^p + \frac{1}{q} \log b^q = \log ab$$

et donc

$$|f(x)||g(x)| \leq \frac{1}{p} |f(x)|^p + \frac{1}{q} |g(x)|^q, \quad p.p. \ \ x \in \Omega$$

II en résulte que $fg \in L^1$ et que

$$\int |fg| \leq \frac{1}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q} \|g\|_{L^q}^q \tag{1.3}$$

En remplaçant dans (1.3) f par λf où $\lambda > 0$, il vient

$$\int |fg| \leq \frac{\lambda^{p-1}}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{\lambda q} \|g\|_{L^q}^q \tag{1.4}$$

et si on choisit $\lambda = \|f\|_{L^p}^{-1} \|g\|_{L^q}^{q/p}$ (de manière à minimiser le membre de droite dans (1.4)). On obtient alors (1.1). ■

Théorème 1.2.2 L^P *est un espace vectoriel et* $\|.\|_{L^p}$ *est une norme pour tout* $1 \leq p \leq \infty$.

Preuve. Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ sont évidents suite à la remarque 1.2.1. Supposons que $1 < p < \infty$ et soient $f, g \in L^p$. Nous avons

$$|f(x) + g(x)|^p \leq (|f(x) + g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

Par conséquent $f + g \in L^p$. D'autre part on a

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|$$

Or $|f+g|^{p-1} \in L^q$ et grâce à l'inégalité de Hölder on obtient

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p}$$

i.e

$$\|f+g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^p}$$

■

Théorème 1.2.3 (Fischer-Riesz) *L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Preuve.

1. Traitons d'abord le cas $p = \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞. Étant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_k tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k} \qquad pour \qquad m, n \geq N_k$$

Ceci implique qu'il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash E_k \qquad \forall m, n \geq N_k \tag{1.5}$$

Enfin, posons $E = \bigcup_k E_k$ (E est négligeable), on voit que pour tout $x \in \Omega \backslash E$ la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soit $f_n(x) \to f(x)$ pour $x \in \Omega \backslash E$. En passant à la limite dans (1.5) quand $m \to \infty$ on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k} \qquad \forall x \in \Omega \backslash E \qquad \forall n \geq N_k$$

par suite $f \in L^\infty$ et $\|f - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}$ $\forall n \geq N_k$, et par conséquent $\|f - f_n\|_{L^\infty} \to 0$

2. Supposons maintenant que $1 \leq p < \infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p. Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p. On extrait une sous-suite (f_n) telle que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1$$

[on procède comme suit : il existe n_1 tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2}$ pour $m, n \geq n_1$; on prend ensuite $n_2 \geq n_1$ tel que $\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2}$ pour $m, n \geq n_2$, etc...]. On va montrer que f_{n_k} converge dans L^p. Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k}, de sorte que l'on a

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \geq 1 \tag{1.6}$$

Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1$$

Du théorème de la convergence monotone on en déduit que $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p$. D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| \leq ... \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que p.p. sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a p.p. sur Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \qquad pour \quad n \geq 2 \tag{1.7}$$

Il en résulte que $f \in L^p$. Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en effet on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ p.p. et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue.
■

1.3 Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

Dans cette section nous présentons des résultats très importants concernant la réflexivité, la séparabilité et la dualité des espaces L^p, pour cela nous allons distinguer l'étude des trois cas :

- $1 < p < \infty$
- $p = 1$
- $p = \infty$

1.3.1 Étude de L^p pour $1 < p < \infty$

Il s'agit du cas le plus " favorable" : L^p est réflexif séparable et le dual de L^p s'identifie à L^{p^*}

Théorème 1.3.1 *L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$*