Posons

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$$

il vient

$$\|g_n\|_{L^p} \leq 1$$

Du théorème de la convergence monotone on en déduit que $g_n(x)$ converge vers une limite finie notée $g(x)$ avec $g \in L^p$. D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| \leq ... \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que p.p. sur Ω, $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $f(x)$. On a p.p. sur Ω

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x) \qquad pour \quad n \geq 2 \tag{1.7}$$

Il en résulte que $f \in L^p$. Enfin $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$; en effet on a $|f_n(x) - f(x)|^p \to 0$ p.p. et $|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$ majorante intégrable. On conclut grâce au théorème de Lebesgue.

■

1.3 Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

Dans cette section nous présentons des résultats très importants concernant la réflexivité, la séparabilité et la dualité des espaces L^p, pour cela nous allons distinguer l'étude des trois cas :

- $1 < p < \infty$
- $p = 1$
- $p = \infty$

1.3.1 Étude de L^p pour $1 < p < \infty$

Il s'agit du cas le plus " favorable" : L^p est réflexif séparable et le dual de L^p s'identifie à L^{p^*}

Théorème 1.3.1 *L^p est réflexif pour $1 < p < \infty$*

Preuve. Pour la démonstration du théorème nous envisageons trois étapes.

Étape 1 (Première inégalité de Clarkson).

Soit $2 \leq p < \infty$; on a

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p) \quad \forall f, g \in L^p \tag{1.8}$$

En effet, il suffit de montrer que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2}(|a|^p + |b|^p) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

On a

$$\alpha^p + \beta^p \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2)^{p/2} \quad \forall \alpha, \beta \geq 0$$

se ramener au cas où $\beta = 1$ et noter que la fonction $(x^2+1)^{p/2} - x^p - 1$ est croissante sur $[0, \infty[$. En prenant $\alpha = \left| \frac{a+b}{2} \right|$ et $\beta = \left| \frac{a-b}{2} \right|$ il vient

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \left(\left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{p/2} = \left(|\frac{a^2}{2}| + |\frac{b^2}{2}| \right)^{p/2} \leq \frac{1}{2}|a|^p + \frac{1}{2}|b|^p$$

cette dernière inégalité résulte de la convexité de la fonction $x \mapsto |x|^{p/2}$ car $p \geq 2$.

Étape 2. L^p est uniformément convexe, et donc réflexif pour $2 \leq p < \infty$.

En effet, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On suppose que

$$\|f\|_{L^p} \leq 1, \|g\|_{L^p} \leq 1 \qquad et \qquad \|f-g\|_{L^p} > \varepsilon$$

On déduit de (1.8) que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p}^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \quad et \;\; donc \quad \left\| \frac{f+g}{2} \right\|_{L^p} < 1 - \delta$$

avec

$$\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^p \right)^{1/p} > 0$$

Par conséquent L^p est uniformément convexe, et donc réflexif.

Étape 3. L^p est réflexif pour $1 < p \leq 2$.

Soit $1 < p \leq 2$. On considère l'opérateur $T : L^p \to (L^{p^*})^*$ défini comme suit :

Soit $u \in L^p$ fixé ; l'application $f \in L^{p^*} \to \int uf$ est une forme linéaire et continue sur L^{p^*} notée Tu de sorte que

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^{p^*}.$$

D'après l'inégalité de Hölder

$$|< Tu, f >| \leq \|u\|_{L^p}\|f\|_{L^{p^*}}$$

et par suite

$$\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} \leq \|u\|_{L^p} \tag{1.9}$$

D'autre part, posons

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \ \ (f_0(x) = 0 \ \ si \ \ u(x) = 0).$$

On a $f_0 \in L^{p^*}$, $\|f_0\|_{L^{p^*}} = \|u\|_{L^p}^{p-1}$ et $< Tu, f_0 >= \|u\|_{L^p}^p$.
Donc

$$\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} \geq \frac{< Tu, f_0 >}{\|f_0\|} = \|u\|_{L^p} \tag{1.10}$$

et en comparant (1.9) et (1.10) on obtient $\|Tu\|_{(L^{p^*})^*} = \|u\|_{L^p}$. Il en résulte que T est une isométrie de L^p sur un sous-espace fermé (puisque L^p est complet) de $(L^{p^*})^*$. Or L^{p^*} est réflexif (2ème étape) et donc $(L^{p^*})^*$ est réflexif. Il s'en suit que $T(L^p)$ est réflexif et donc aussi L^p. ∎

Théorème 1.3.2 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit* $1 < p < \infty$ *et soit* $\varphi \in (L^p)^*$. *Alors if existe* $u \in L^{p'}$ *unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p$$

De plus on a

$$\|u\|_{L^{p^*}} = \|\varphi\|_{(L^p)^*}$$

Preuve. On définit l'opérateur $T : L^{p^*} \to (L^p)^*$ par

$$< Tu, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^p$$

et l'on a

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{L^{p^*}} \qquad \forall u \in L^{p^*}$$

pour cela on procédera comme dans la démonstration du théorème 1.3.1, 3ème étape, on doit avoir dans ce cas T surjectif. On pose alors $E = T(L^{p^*})$ Comme E est un sous-espace fermé, il reste à montrer que E est dense dans $(L^p)^*$. Soit $h \in (L^p)^{**}$ [$= L^p$ puisque L^p est réflexif] tel que $< Tu, h >= 0$ pour tout $u \in L^{p^*}$; vérifions que $h = 0$. Nous avons

$$\int uh =< Tu, h >= 0 \qquad \forall u \in L^{p^*}$$

On conclut que $h = 0$ en choisissant $u = |h|^{p-2}h$. ∎

Remarque 1.3.1 *Le théorème 1.3.2 est très important. Il exprime que toute forme linéaire continue sur L^p avec $1 < p < \infty$ se représente à l'aide d'une fonction de L^{p^*}. L'application $\varphi \mapsto u$ est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de L^p avec L^{p^*}. Dans la suite on fera systématiquement l'identification*

$$(L^p)^* = L^{p^*}.$$

Théorème 1.3.3 (Densité) *L'espace $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$*

La définition et le lemme suivants sont essentiels pour la preuve de notre théorème de densité.

Définition 1.3.1 *Soit $1 \leq p \leq \infty$; on dit qu'une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ appartient à $L^p_{loc}(\Omega)$ si $f\mathbb{I}_K \in L^p(\Omega)$ pour tout compact $K \subset \Omega$.*

Lemme 1.3.1 *Soit $f \in L^p_{loc}(\Omega)$ tel que*

$$\int fu = 0 \qquad \forall u \in C_c(\Omega). \tag{1.11}$$

Alors $f = 0$ p.p. sur Ω

Preuve. du lemme : On procède en deux étapes :

1. Supposons que l'on ait, de plus, $f \in L^1(\Omega)$ et $|\Omega| < \infty$. Étant donné $\varepsilon > 0$ il existe $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^1} < \varepsilon$. D'après (1.11) on a

$$\left| \int f_1 u \right| \leq \varepsilon \|u\|_{L^\infty} \qquad \forall u \in C_c(\Omega) \tag{1.12}$$

Soient

$$\begin{aligned} K_1 &= \{x \in \Omega, \;\; f_1(x) \geq \varepsilon\} \\ K_2 &= \{x \in \Omega, \;\; f_1(x) \leq -\varepsilon\} \end{aligned}$$

Comme K_1 et K_2 sont des compacts disjoints, on peut construire une fonction $u_0 \in C_c(\Omega)$ telle que

$$u_0(x) = \begin{cases} +1, & si \quad x \in K_1 \\ -1, & si \quad x \in K_2 \end{cases}$$

et

$$|u_0(x)| \leq 1 \qquad \forall x \in \Omega$$

Posons $K = K_1 \cup K_2$ il vient

$$\int_\Omega f_1 u_0 = \int_{\Omega\backslash K} f_1 u_0 + \int_K f_1 u_0$$

et donc, grâce à (1.12)

$$\int_K |f_1| = \int_K f_1 u_0 \leq \varepsilon + \int_{\Omega\backslash K} |f_1 u_0| \leq \varepsilon + \int_{\Omega\backslash K} |f_1|$$

Par conséquent

$$\int_\Omega |f_1| = \int_{\Omega\backslash K} |f_1| + \int_K |f_1| \leq \varepsilon + 2\int_{\Omega\backslash K} |f_1| \leq \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$$

puisque

$$|f_1| \leq \varepsilon \quad sur \quad \Omega\backslash K$$

Donc

$$\|f_1\|_{L^1} \leq \|f - f_1\|_{L^1} + \|f_1\|_{L^1} \leq \varepsilon + 2\varepsilon|\Omega|$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$ on conclut que $f = 0$ p.p. sur Ω.

2. Considérons maintenant le cas général. On écrit $\Omega = \bigcup_n \Omega_n$ avec Ω_n ouvert, $\overline{\Omega}_n$ compact, $\overline{\Omega}_n \subset \Omega$ [Prendre par exemple $\Omega_n = \{x \in \Omega; dist(x, \complement\Omega) > \frac{1}{n}$ et $|x| < n\}$]. En appliquant ce qui précède avec Ω_n et $f_{|\Omega_n}$ on voit que $f = 0$ p.p. sur Ω_n et on conclut que $f = 0$ p.p. sur Ω.

■

Preuve. du théorème 1.3.3 : On sait déjà que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^1(\Omega)$. Supposons donc que $1 < p < \infty$. Pour prouver que $C_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ il suffit de vérifier que si $h \in L^{p^*}(\Omega)$ satisfait $\int hu = 0$ pour tout $u \in C_c(\Omega)$, alors $h = 0$. Or $h \in L^1_{loc}(\Omega)$ puisque $\int |h\mathbb{I}_K| \leq \|h\|_{L^{p^*}} |K|^{1/p} < \infty$ et on peut donc appliquer le lemme 1.3.1 pour conclure que $h = 0$ p.p. ■

Théorème 1.3.4 *$L^p(\Omega)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$.*

Preuve. On désigne par $(R_i)_{i\in I}$ la famille dénombrable de pavés R de la forme

$$R = \prod_{k=1}^n]a_k, b_k[\ \ avec \ \ a_k, b_k \in \mathbb{Q} \ \ et \ \ R \in \Omega.$$

On désigne par E l'espace vectoriel sur $\mathbb{Q}$ engendré par les fonctions $\mathbb{I}_{R_i}$. (i.e. les combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels des fonctions $\mathbb{I}_{R_i}$), de sorte que E est dénombrable. Montrons que E est dense dans $L^p(\Omega)$. Soit $f \in L^p(\Omega)$ et soit $\varepsilon > 0$ fixés. Soit $f_1 \in C_c(\Omega)$ tel que $\|f - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ (théorème 1.3.3). Soit Ω' un ouvert borné tel que $Supp f_1 \subset \Omega' \subset \Omega$, comme $f_1 \in C_c(\Omega')$, on construit aisément une fonction $f_2 \in E$ telle que $Supp f_2 \subset \Omega'$ et que $|f_2(x) - f_1(x)| \leq \frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$ p.p. sur Ω'. On commence par recouvrir $Supp f_1$ par un nombre fini de pavés R_i sur lesquels l'oscillation de f_1 est inférieure à $\frac{\varepsilon}{|\Omega'|^{1/p}}$. Il en résulte que $\|f_2 - f_1\|_{L^p} < \varepsilon$ et donc $\|f - f_2\|_{L^p} < 2\varepsilon$. ■

1.3.2 Étude de L^1

Théorème 1.3.5 *Soit $\varphi \in (L^1)^*$. Alors il existe $u \in L^\infty$ unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int uf \qquad \forall f \in L^1$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}$$

Preuve. Commençons par prouver l'existence de u. Pour cela, on fixe une fonction $w \in L^2(\Omega)$ telle que pour tout compact $K \subset \Omega$, $w \geq \varepsilon_K > 0$ p.p. sur K. Il est clair qu'une telle fonction existe : prendre par exemple $w(x) = \alpha_n$. Pour $x \in \Omega$, $n \leq |x| < n + 1$, et ajuster les constantes $\alpha_n > 0$ pour que $w \in L^2(\Omega)$. L'application $f \in L^2 \mapsto < \varphi, wf >$ est une forme linéaire et continue sur L^2. D'après l'application du théorème 1.3.2 avec $p = 2$, il existe une fonction $v \in L^2$ telle que

$$< \varphi, wf >= \int vf \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.13}$$

Posons $u(x) = \frac{v(x)}{w(x)}$; ce qui a un sens puisque $w(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$ et u est mesurable. Montrons que $u \in L^\infty$ et que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. D'après (1.13) on a

$$|\int vf| \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \|wf\|_{L^1} \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.14}$$

Soit $C > \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Montrons que l'ensemble

$$A = \{x \in \Omega; \ \ |u(x)| > C\}$$

est négligeable, il en résultera que $u \in L^\infty$ et que $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. Raisonnons par l'absurde.

Si A n'est pas négligeable il existe $\widetilde{A} \subset A$ mesurable tel que $0 < |\widetilde{A}| < \infty$. On reporte dans (1.14) la fonction

$$f(x) = \begin{cases} +1, & si \quad x \in \widetilde{A} \ \ et \ \ u(x) > 0; \\ -1, & si \quad x \in \widetilde{A} \ \ et \ \ u(x) < 0; \\ 0, & si \quad x \in \Omega \backslash \widetilde{A}. \end{cases}$$

II vient $\int_{\widetilde{A}} |u| w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\widetilde{A}} w$, et par conséquent $C \int_{\widetilde{A}} w \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*} \int_{\widetilde{A}} w$, ce qui est absurde puisque $\int_{\widetilde{A}} w > 0$.

Récapitulons : on a construit $u \in L^\infty(\Omega)$ avec $\|u\|_{L^\infty} \leq \|\varphi\|_{(L^1)^*}$ tel que

$$< \varphi, wf >= \int uwf \qquad \forall f \in L^2 \tag{1.15}$$

Il en résulte que

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in C_c(\Omega) \tag{1.16}$$

En effet si $g \in C_c(\Omega)$, alors $f = \frac{g}{w} \in L^2$ (puisque $w \geq \varepsilon > 0$ sur *Supp* g) et on peut reporter f dans (1.15). comme $C_c(\Omega)$ est dense dans L^1 on déduit de (1.16) que

$$< \varphi, g >= \int ug \qquad \forall g \in L^1$$

Enfin, on a

$$| < \varphi, g > | \leq \int |ug| \leq \|u\|_{L^\infty} \|g\|_{L^1} \qquad \forall g \in L^1$$

et donc $\|\varphi\|_{(L^1)^*} \leq \|u\|_{L^\infty}$. Par conséquent $\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)^*}$. L'unicité de u est une conséquence immédiate du lemme 1.3.1. ■

Remarque 1.3.2 *Le théorème 1.3.5 affirme que toute forme linéaire et continue sur L^1 se représente à l'aide d'une fonction de L^∞. L'application $\varphi \mapsto u$ est une isométrie surjective qui permet d'identifier $(L^1)^*$ et L^∞. Dans la suite on fera systématiquement I'identification*

$$(L^1)^* = L^\infty.$$

Remarque 1.3.3 *L'espace L^1 n'est pas réflexif. En effet, supposons pour fixer les idées que $0 \in \Omega$. Considérons la suite $f_n = \alpha_n \mathbb{I}_{B(0,\frac{1}{n})}$ avec n assez grand pour que $B(0, \frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\alpha_n = \left|B(0, \frac{1}{n})\right|^{-1}$ de sorte que $\|f_n\|_{L^1} = 1$. Si L^1 était réflexif il existerait une sous-suite extraite (f_{n_k}) et une fonction $f \in L^1$ tels que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ pour la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Donc*

$$\int f_{n_k} \varphi \to \int f \varphi \qquad \forall \varphi \in L^\infty \tag{1.17}$$

Lorsque $\varphi \in C_c(\Omega\backslash\{0\})$ *on voit que* $\int f_{n_k}\varphi = 0$ *pour* k *assez grand. Il résulte de (1.17) que*

$$\int f\varphi = 0 \qquad \forall\varphi \to C_c(\Omega\backslash\{0\})$$

En appliquant le lemme 1.3.1 en considérant l'ouvert $\Omega\backslash\{0\}$ *à la fonction* f *(restreinte à* $\Omega\backslash\{0\}$*) on obtient que* $f = 0$ *p.p. sur* $\Omega\backslash\{0\}$. *Donc en fait* $f = 0$ *p.p. sur* Ω. *Par ailleurs si l'on prend* $\varphi \equiv 1$ *dans (1.17), il vient* $\int f = 1$ *ce qui est absurde.*

1.3.3 Étude de L^∞

Le théorème 1.3.5 nous montre que $L^\infty = (L^1)^*$ et plus encore $L^1(\Omega)$ est séparable. De ce fait, l'espace L^∞ possède quelques propriétés qui méritent d'être soulignées. Entre autres, on a :

- La boule unité fermée B_{L^∞} est compacte pour la topologie faible $*\sigma(L^\infty, L^1)$
- Si (f_n) est une suite bornée dans L^∞ on peut en extraire une sous-suite qui converge dans L^∞ pour la topologie faible $*\sigma(L^\infty, L^1)$

Toutefois remarquons que L^∞ n'est pas réflexif.

Comme $L^\infty = (L^1)^*$, on a $L^1 \subset (L^1)^{**} \subset (L^\infty)^*$ et donc le dual de L^∞ contient L^1. De plus, il est strictement plus grand sinon L^1 serait réflexif. Donc il existe des formes φ linéaires et continues sur L^∞ qui ne sont pas du type

$$< \varphi, f >= \int_\Omega \varphi f \qquad \forall f \in L^\infty$$

pour un certain $u \in L^1$. Fabriquons un exemple explicite. Supposons que $0 \in \Omega$ et soit $\varphi_0 : C_c(\Omega) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi_0(f) = f(0)$, pour $f \in C_c(\Omega)$. Il est clair que φ_0 est une forme linéaire et continue sur $C_c(\Omega)$ pour la norme infinie. D'après le théorème de Hahn-Banach, φ_0 se prolonge en une forme linéaire et continue sur L^∞, notée φ. On a

$$< \varphi, f >= f(0) \qquad \forall f \in C_c(\Omega). \tag{1.18}$$

Supposons qu'il existe une fonction $u \in L^1$ telle que

$$< \varphi, f >= \int_\Omega \varphi f \qquad \forall f \in L^\infty.$$

Alors, on a

$$\int_\Omega uf = 0 \qquad \forall f \in C_c(\Omega\backslash\{0\}).$$

Ceci entraîne que $u = 0$ p.p. sur $\Omega\backslash\{0\}$, soit $u = 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent,

$$< \varphi, f >= 0 \qquad \forall f \in L^\infty,$$

ce qui est contraire à (1.18).

Théorème 1.3.6 *L'espace L^∞ n'est pas séparable.*

Lemme 1.3.2 *Soit E un espace de Banach. On suppose qu'il existe une famille $(\mathcal{O}_i)_{i\in I}$ telle que*

i) *Pour tout $i \in I$, $\mathcal{O}_i$ est un ouvert non vide de E.*

ii) *$\mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j = \varnothing$ si $i \neq j$*

iii) *I n'est pas dénombrable.*

Alors E n'est pas séparable.

Preuve. du lemme : Raisonnons par l'absurde et supposons que E est séparable. Soit $(u_n)_{n\in N}$ une suite dense dans E. Pour chaque $i \in I$, $\mathcal{O}_i \cap (u_n)_{n\in N} \neq \varnothing$ et on choisit $n(i)$ tel que $u_{n(i)} \in \mathcal{O}_i$. L'application $i \mapsto n(i)$ est injective ; en effet si $n(i) = n(j)$ alors $u_{n(i)} = u_{n(j)} \in \mathcal{O}_i \cap \mathcal{O}_j$ et donc $i = j$. Par suite I est dénombrable - ce qui est contraire à (iii). ∎

Preuve. du théorème : Montrons maintenant que L^∞ n'est pas séparable. Pour tout $a \in \Omega$ on fixe $r_a < dist(a, \complement\Omega)$; on pose $u_a = \mathbb{I}_{B(a,r_a)}$ et

$$\mathcal{O}_a = \{f \in L^\infty ; \|f - u_a\|_{L^\infty} < \frac{1}{2}\}$$

On vérifie aisément que la famille $(\mathcal{O}_a)_{a\in\Omega}$ satisfait (i), (ii) et (iii).
On conclut donc que L^∞ n'est pas séparable. ∎

Le tableau suivant récapitule les principales propriétés des espaces L^p.

	Réflexif	**Séparable**	**Espace dual**
L^p $1 < p < \infty$	OUI	OUI	L^{p^*}
L^1	NON	OUI	L^∞
L^∞	NON	NON	Contient strictement L^1