

1.4 Convolution et régularisation sur $\mathbb{R}^n$

En présentant dans cette section le produit de convolution et leur propriété, la régularisation et les supports dans la convolution, on prend dans tout ce paragraphe $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.1 Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$. On dit que le produit de convolution de f par g existe au point $x \in \mathbb{R}^n$, et dans ce cas on le note $f \star g(x)$, si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy$ a un sens. Dans ce cas, on pose :

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Proposition 1.4.1 Soient f et g deux fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$. Si $f \star g(x)$ existe, alors $g \star f(x)$ existe aussi et $f \star g(x) = g \star f(x)$.

Preuve. Supposons que $f \star g(x)$ existe, alors la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire $\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy < \infty$.

On pose $\varphi : u \mapsto x-u = y$ qui est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Alors par application du théorème de changement de variable à la fonction h définie sur $\mathbb{R}^n$ par $h(y) = f(x-y)g(y)$ on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} h(\varphi(u))du = \int_{\mathbb{R}^n} f(u)g(x-u)du.$$

Donc $f \star g(x) = g \star f(x) \forall x \in \mathbb{R}^n$. ■

Remarque 1.4.1 Soient f, g et h trois fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a : $[(f \star g) \star h](x) = [f \star (g \star h)](x)$.

Théorème 1.4.1 Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et $f \star g \in L^p$, de plus on a :

$$\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$$

Preuve.

Pour $p = \infty$:

Soient $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$. Montrons que la fonction mesurable $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons, $f \in L^1$ alors $\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^n} |f| dx < \infty$, $g \in L^\infty$ donc $\exists C > 0$ tel que $|g(x)| \leq C$ p.p. Par conséquent,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy.$$

Comme la mesure de Lebesgue est stable par translation, alors $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy = \|f\|_{L^1}$. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy \leq C \|f\|_{L^1} < \infty,$$

ce qui donne $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$, par suite $f \star g(x)$ existe presque partout.

Montrons l'inégalité :

$$\text{On a : } |f \star g(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy,$$

et on sait que $|g(y)| \leq \|g\|_{L^\infty}$, on obtient alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \|g\|_{L^\infty} dy \\ &\leq \|g\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy \\ &\leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

et par suite $|f \star g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}$ p.p. Donc $\|f \star g(x)\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1}$ par définition de la norme $\|\cdot\|_{L^\infty}$

Pour $p = 1$:

On pose $F(x, y) = f(x-y)g(y)$, alors F est mesurable et pour presque tout $y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx = |g(y)| \|f\|_{L^1}$$

Comme $f \in L^1$ alors $\|f\|_{L^1} < \infty$, et $g \in L^1$ donc $\lambda(\{g = +\infty\}) < \infty$ par suite $|g(y)| \|f\|_{L^1} < \infty$ p.p. Donc $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dy < \infty$ pour presque tout $y \in L^1$.

D'après le théorème de Fubini, on a :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| dy \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \\ &= \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1} < \infty, \end{aligned}$$

et par application du théorème de Tonelli on voit que $F \in L^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, et par le théorème de Fubini nous obtenons $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dy < \infty$; donc $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur

$\mathbb{R}^n$ et :

$$\begin{aligned}\|f \star g\|_{L^1} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f \star g(x)| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} dx \int_{\mathbb{R}^n} |F(x, y)| dy \\ &\leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}\end{aligned}$$

Pour $1 < p < \infty$:

Supposons que $f \in L^1$ et $g \in L^p$, alors $|g|^p \in L^1$ et par suite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto |f(x - y)| |g(y)|^p$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$. On a : $|f(x - y)| |g(y)|^p \in L^1_y$ donc $|f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L^p_y$.

Soit $q \in]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors $f \in L^1$ implique que $|f|^{\frac{1}{q}} \in L^q$ d'où $|f(x - y)|^{\frac{1}{q}} \in L^q_y$ et donc :

$$\begin{aligned}|f(x - y)| |g(y)| &= |f(x - y)|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}} |g(y)| \\ &= |f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| |f(x - y)|^{\frac{1}{q}}.\end{aligned}$$

Par utilisation de l'inégalité de Hölder, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y) g(y)| dy &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \right)^p \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)|^{\frac{q}{q}} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x - y)| |g(y)|^p \right) \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |f(x - y)| \right]^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

alors $|f \star g(x)| \leq \left[\left(|f| \star |g|^p(x) \right) \right]^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^1}^{\frac{1}{q}}$ ce qui donne : $|f \star g(x)|^p \leq (|f| \star |g|^p(x)) \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \in L^p$ ainsi $f \star g \in L^p$ et :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f \star g(x)|^p dx &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} (|f| \star |g|^p(x)) dx \\ &\leq \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \| |g|^p \|_{L^1} \|f\|_{L^1} \\ &\leq \|f\|_{L^1}^p \|g\|_{L^p}^p\end{aligned}$$

ce qui donne $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. ■

1.4.1 Supports dans la convolution

La notion de support d'une fonction continue est bien connue : c'est le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle ou encore c'est l'adhérence de l'ensemble

$\{x; f(x) \neq 0\}$. Quand on travaille avec des fonctions mesurables il faut être plus prudent, puisque ces fonctions sont seulement définies presque partout. La définition appropriée est la suivante :

Proposition 1.4.2 (et définition du support) *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et soit f une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. On considère la famille de tous les ouverts $(\omega_i)_{i \in I}$, $\omega_i \subset \Omega$ tels que pour chaque $i \in I$, $f = 0$ p.p. sur ω_i . On pose $\omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$, alors $f = 0$ p.p. sur ω et par définition, $\text{Supp} f = \Omega \setminus \omega$.*

Preuve. La famille d'indices I est quelconque, pour se ramener au cas dénombrable on procède de la manière suivante :

Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de compacts tels que $\omega = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} K_i$, on peut prendre :

$$K_i = \{x \in \omega, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \omega) \geq \frac{1}{i} \text{ et } \|x\| \leq i\}$$

on a $K_i \subset \omega = \bigcup_{i \in I} \omega_i$ puisque K_i est compact il existe $I_i \subset I$ fini tel que $K_i \subset \bigcup_{j \in I_i} \omega_j$.

Posons $J = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$ donc J est dénombrable et comme $K_i \subset \bigcup_{j \in I_i} \omega_j$ alors :

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \in I_i} \omega_j = \bigcup_{j \in \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i} \omega_j$$

donc $\omega \subset \bigcup_{j \in J} \omega_j$ et puisque $J \subset I$, alors :

$$\bigcup_{j \in J} \omega_j \subset \omega$$

Comme $f = 0$ p.p. sur ω_j alors $\exists N_j \subset \omega_j$ tel que N_j est négligeable et $\forall x \in N_j^c$ $f(x) = 0$ on prend $N = \bigcup_{j \in J} N_j$ et on a :

$$\lambda(N) = \lambda\left(\bigcup_{j \in J} N_j\right) \leq \sum_{j \in J} \lambda(N_j) = 0$$

donc N est négligeable, et par suite $\exists N \subset \omega$ tel que $\forall x \in N^c$ $f(x) = 0$ donc $f = 0$ p.p. sur ω . ■

Remarque 1.4.2 1. Si f_1 et f_2 sont deux fonctions telles que $f_1 = f_2$ p.p. sur Ω alors $\text{supp}(f_1) = \text{supp}(f_2)$, on peut donc parler du support d'une fonction $f \in L^p$.

2. Si f est continue sur Ω on vérifie facilement que cette définition coïncide avec la définition usuelle.

Proposition 1.4.3 Soient $f \in L^1$ et $g \in L^p$. Alors

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}.$$

Preuve. Soit $x \in \mathbb{R}^n$ fixé tel que la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ soit intégrable. On peut écrire :

$$\begin{aligned} (f \star g)(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{S_x} f(x-y)g(y)dy + \int_{S_x^c} f(x-y)g(y)dy \end{aligned}$$

où

$$S_x = \{y \in \mathbb{R}^n, y \in \text{supp}(g) \text{ et } x-y \in \text{supp}(f)\}.$$

Nous avons alors $\int_{S_x^c} f(x-y)g(y)dy = 0$, ce qui donne,

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy = \int_{S_x} f(x-y)g(y)dy.$$

Si x n'est pas dans $\text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ alors $(x - \text{supp}(f)) \cap \text{supp}(g) = \emptyset$; sinon $\exists y$ tel que $y \in (x - \text{supp}(f))$ et $y \in \text{supp}(g)$ donc $x-y \in \text{supp}(f)$ et $y \in \text{supp}(g)$ et par suite $x = x-y+y \in \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$, ce qui contredit le fait que x n'est pas dans $\text{supp}(f) + \text{supp}(g)$ et donc $(f \star g)(x) = 0$ p.p. sur $(\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c$ en particulier sur $\text{int}((\text{supp}(f) + \text{supp}(g))^c) = \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}^c$ où $\text{int}(B)$ est l'intérieur de B , et par conséquent $\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}(f) + \text{supp}(g)}$. ■

Remarque 1.4.3 Bien entendu si f et g sont tous deux à supports compacts, alors $f \star g$ est à support compact. En général, si l'un des supports seulement est compact, alors $f \star g$ n'est pas à support compact.

Proposition 1.4.4 Soient $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Alors

$$f \star g \in C(\mathbb{R}^n).$$

Preuve. Notons d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n$ et donc $(f \star g)(x)$ a un sens pour tout $x \in \mathbb{R}^n$. Soit $x_n \mapsto x$ et posons

$$F_n(y) = f(x_n - y)g(y)$$

$$F(y) = f(x - y)g(y)$$

de sorte que $F_n(y) \mapsto F(y)$ p.p. sur $\mathbb{R}^n$. D'autre part, soit K un compact fixe tel que $(x_n - \text{Supp}f) \subset K$ pour tout n . Donc $f(x_n - y) = 0$ pour y qui n'est pas dans K et par suite $|F_n(y)| \leq \|f\|_{L^\infty} \mathbb{I}_K(y)g(y)$, majorante intégrable. On déduit du théorème de Lebesgue que

$$(f \star g)(x_n) = \int F_n(y)dy \rightarrow \int F(y)dy = (f \star g)(x).$$

■

Notations

$C^k(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω

$$\begin{aligned} C^\infty(\Omega) &= \bigcap_k C^k(\Omega) \\ C_c^k(\Omega) &= C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega) \\ C_c^\infty(\Omega) &= C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega) \end{aligned}$$

Théorème 1.4.2 Soient $f \in C_c^m(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ ($m \in \mathbb{N}$). Alors

$$f \star g \in C^m(\mathbb{R}^n) \text{ et } D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g \text{ avec } |\alpha| \leq m \text{ et.}$$

En particulier, si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soient $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ et h la fonction définie sur $\beta(x_0, r) \times K'$ par : $h(x, y) = f(x - y)g(y)$ où $K' = \{a - b/a \in \beta_f(0, \eta) \text{ et } b \in K\}$ avec $K = \text{supp}f$ alors K' est un compact car $K' = \tau(\beta_f(0, \eta) \times K)$ où τ est l'application continue définie par $\tau(a, b) = a - b$. Pour tout $x \in \beta(x_0, \eta)$, la fonction $y \mapsto h(x, y)$ est intégrable sur K' . Pour presque tout $y \in K'$, $x \mapsto h(x, y)$ est de classe C^m sur $\beta(x_0, \eta)$ et pour tout multi-indice α avec $|\alpha| \leq m$, on a pour tout $(x, y) \in \beta(x_0, \eta) \times (K' \setminus N)$ où N est un ensemble négligeable sur lequel g n'est pas définie, on a :

$$\begin{aligned} |D^\alpha h(x, y)| &= |D^\alpha f(x - y)g(y)| \\ &\leq \sup_{z \in \mathbb{R}^n} |D^\alpha f(z)| |g(y)| \\ &\leq \max_{z \in K} |D^\alpha f(z)| |g(y)|. \end{aligned}$$

Comme $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ alors $g|_{K'}$ est intégrable et par le théorème de dérivation sous le signe intégrale, la fonction $x \mapsto \int_{K'} h(x, y)dy = f \star g(x)$ admet des dérivées partielles sur $\beta(x_0, \eta)$ et $D^\alpha(f \star g) = D^\alpha f \star g$ sur $\beta(x_0, \eta)$ pour tout $|\alpha| \leq m$, ce qui donne que $f \star g$ est de classe C^m sur $\beta(x_0, \eta)$ d'où le résultat puisque x_0 et η sont quelconques. En particulier si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, alors $f \star g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. ■

1.4.2 Suites régularisantes

Définition 1.4.2 On appelle suite régularisante toute suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ de fonctions telles que :

1. $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
2. $\text{supp} \rho_n \subset \beta(0, \frac{1}{n})$
3. $\int \rho_n = 1$
4. $\rho_n \geq 0$ sur $\mathbb{R}^n$

Remarque 1.4.4 Dorénavant, on utilisera systématiquement $(\rho_n)_{n \geq 1}$ pour désigner une suite régularisante.

Une application sur la suite régularisante est présentée par l'exemple suivant :

Exemple 1.4.1 Soit $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$u(x) = \begin{cases} \exp \frac{1}{x}, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$, $u^{(k)}(x) = P_k(\frac{1}{x}) \exp \frac{1}{x}$ si $x < 0$ où P_k sont des polynômes définies par récurrence :

$$P_0(x) = 1$$

$$P_{k+1}(x) = -x^2(P'_k(x) + P_k(x)) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} u^{(k)}(x) = 0$$

donc $u \in C^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp}(u) = \mathbb{R}^-$. Posons :

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}, & \text{si } \|x\| < 1 \\ 0, & \text{si } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (\text{norme euclidienne})$$

Alors :

$$\rho : x \in \mathbb{R}^n \mapsto \|x\|^2 - 1 \in \mathbb{R} \mapsto \rho(x) \in \mathbb{R}$$

est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, $\text{supp}(\rho) = \beta(0, 1)$, $\rho(x) \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^n$, $\rho > 0$ sur $\beta(0, 1)$ donc :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx > 0.$$

Posons alors $c = (\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x) dx)^{-1}$ et prenons $\rho_k(x) = ck^n \rho(kx)$ $k \in \mathbb{N}$; alors $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

Proposition 1.4.5 Soit $f \in C(\mathbb{R}^n)$ alors $\rho_n \star f$ converge uniformément vers f sur tout compact de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. f étant continue sur $\mathbb{R}^n$ elle est uniformément continue sur K d'après le théorème de Heine. Par suite :

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \eta > 0 \ \forall x, y \in K : \|x - y\| < \eta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

pour $y \in \beta(0, \eta)$ et $x \in K$, on a

$$\|y\| = \|x - y + y\| < \eta \implies |f(x - y) - f(y)| < \varepsilon$$

et donc

$$\begin{aligned} |(\rho_n \star f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \rho_n(y) dy - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) \rho_n(y) dy - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \rho_n(y) dy \right| \\ &= \int_{\beta(0, \frac{1}{n})} |f(x - y) - f(x)| \rho_n(y) dy \end{aligned}$$

Finalement, pour $\varepsilon > 0$ et pour $E(\frac{1}{\eta})$ on a pour tout $n > \frac{1}{\eta} \geq E(\frac{1}{\eta})$ et pour tout $x \in K$ on ait $|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| < \varepsilon$ ■

Théorème 1.4.3 Soit $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < \infty$. Alors $\rho_n \star f$ converge vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Preuve. Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Comme $C_c(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ alors $\exists f_\varepsilon \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tel que $\|f - f_\varepsilon\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

D'après la proposition précédente $\rho_n \star f_\varepsilon$ converge uniformément vers f_ε sur tout compact.

D'autre part on a :

$$\text{supp}(\rho_n \star f_\varepsilon) \subset \overline{\text{supp}(\rho_n) + \text{supp}(f_\varepsilon)}$$

et

$$\text{supp}(\rho_n) \subset \beta(0, \frac{1}{n})$$

donc

$$\text{supp}(\rho_n \star f_\varepsilon) \subset \overline{\beta(0, \frac{1}{n}) + \text{supp}(f_\varepsilon)} \subset K$$

où K est un compact fixé. K étant compact donc borné et mesurable donc $\lambda(K) < \infty$ en plus $\rho_n \star f_\varepsilon$ converge uniformément vers f_ε donc :

$$\|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \text{ tend vers } 0 \text{ avec } \frac{1}{n}$$

On a :

$$\begin{aligned} (\rho_n \star f)(x) - f(x) &= (\rho_n \star f)(x) - (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) + (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f(x) \\ &= \rho_n \star (f - f_\varepsilon)(x) + (\rho_n \star f_\varepsilon)(x) - f_\varepsilon(x) + f_\varepsilon(x) - f(x). \end{aligned}$$

Alors :

$$\|\rho_n \star f - f\|_p \leq \|\rho_n \star (f - f_\varepsilon)\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p.$$

Or d'après le théorème 1.4.1, nous avons,

$$\|\rho_n \star (f - f_\varepsilon)\|_p \leq \|\rho_n\|_1 \|f - f_\varepsilon\|_p = \|f - f_\varepsilon\|_p$$

d'où,

$$\begin{aligned} \|\rho_n \star f - f\|_p &\leq \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p + \|f_\varepsilon - f\|_p \\ &\leq 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq 2\frac{\varepsilon}{3} \|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_\varepsilon$ on a $\|\rho_n \star f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p < \frac{\varepsilon}{3}$ par suite $\forall n \geq N_\varepsilon$, on a $\|\rho_n \star f - f\|_p < \varepsilon$ c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\rho_n \star f - f\|_p = 0.$$

■

Corollaire 1.4.1 Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert quelconque. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p < \infty$

Preuve. Soit $f \in L^p(\Omega)$, montrons qu'il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\Omega)$. Posons

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in \Omega \\ 0, & \text{si } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}$$

alors $\bar{f} \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Posons $f_n = \rho_n \star \bar{f}$ avec $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est une suite régularisante. D'après le théorème 1.4.2 nous avons $f_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \forall n \geq 1$ et en vertu du théorème 1.4.3 la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge vers $\bar{f}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, par suite $f_{n/\Omega}$ converge vers $\bar{f}_{/\Omega} = f$ dans $L^p(\Omega)$. Par conséquent $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$. ■