# Chapitre 2

# Transformation de Fourier

La transformation de Fourier est une extension, pour les fonctions non périodiques, du développement en série de Fourier des fonctions périodiques. La transformation de Fourier associe à une fonction intégrable, définie sur l'ensemble des nombres réels ou celui des nombres complexes, une fonction appelée transformée de Fourier dont la variable indépendante peut s'interpréter en physique comme la fréquence ou la pulsation.
Lorsqu'une fonction représente un phénomène physique, comme l'état du champ électromagnétique ou du champ acoustique en un point, on l'appelle signal et sa transformée de Fourier s'appelle son spectre. Pour ce faire nous nous basons sur les références suivants [6, 4, 8].

## 2.1 Définitions et Exemples

**Définition 2.1.1** *Soit une fonction $f(t)$ absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(t)$ et sa dérivée $f'(t)$ sont continues (éventuellement par morceaux) sur tout intervalle fini de $\mathbb{R}$. La transformée de Fourier de $f(t)$, notée $\mathcal{F}(f(t))$ est définie par :*

$$F(\alpha) = \widehat{f}(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt.$$

**Définition 2.1.2** *La transformée inverse de Fourier, notée $\mathcal{F}^{-1}$, telle que si $F(\alpha) = F(f(t))$, alors $f(t)$ est la transformée inverse de $F(\alpha)$. Autrement dit, on a l'équivalence :*

$$F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)).$$

*La transformée inverse est définie par :*

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha) e^{i2\pi\alpha t} d\alpha.$$

**Remarques 2.1.1** *1. La condition $f(t)$ absolument intégrable est une condition suffisante mais non nécessaire, certaines fonctions non absolument intégrables ont tout de même une transformée de Fourier.*

*2. Si la fonction $f(t)$ est discontinue en $t_0$, la transformée de Fourier est définie en considérant les intégrales à gauche et à droite de $f(t)$, par :*

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{t_0} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt + \int_{t_0}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt.$$

*Dans ce cas, la transformée inverse de $F(\alpha)$ coïncide avec $f(t)$ partout sauf en $t_0$. En ce point particulier la comparaison n'a pas de sens étant donné que $f(t)$ n'est pas définie.*

**Exemple 2.1.1** *Soit la fonction porte définie par :*

$$f(t) = \begin{cases} 1, & si\ 0 \leq t \leq T; \\ 0, & sinon. \end{cases} \tag{2.1}$$

*La transformée de Fourier est donnée par :*

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt = \int_{0}^{T} e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \left[\frac{e^{-i2\pi\alpha t}}{-i2\pi\alpha}\right]_0^T = \frac{e^{-i2\pi\alpha T} - 1}{-i2\pi\alpha} \\ &= T e^{-i\pi\alpha T} sinc(\pi\alpha T). \end{aligned}$$

*Où la fonction sinc (pour sinus cardinal) est définie par $sinc(x) = sin(x)/x$, si $x \neq 0$, et $sinc(0) = 1$.*

**Exemple 2.1.2** *Soit la fonction $f(t)$ définie par : $f(t) = e^{-|t|}$*

*La transformée de Fourier est donnée par :*

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-t}e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{t}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i2\pi\alpha)}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i2\pi\alpha)}dt \\
&= \left[\frac{e^{t(1-i2\pi\alpha)}}{1-i2\pi\alpha}\right]_{-\infty}^{0} + \left[\frac{e^{-t(1+i2\pi\alpha)}}{-(1+i2\pi\alpha)}\right]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{2}{1+4\pi^2\alpha^2}.
\end{aligned}
$$

**Exemple 2.1.3** *Montrer que la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac centrée en $t_0$, notée $\delta_{t_0}(t) = \delta(t-t_0)$ est $F(\alpha) = 1$, pour $t_0 = 0$. La transformée de l'impulsion de Dirac est donnée par :*

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = e^{-i2\pi\alpha t_0}.$$

*On peut en particulier noter que s'il s'agit de l'impulsion centrée en l'origine, la transformée est $F(\alpha) = 1$.*

## 2.2 Cosinus et Sinus- Transformées de Fourier

**Définition 2.2.1** *Si la fonction $f(t)$ est réelle et paire, la transformée de Fourier de $f(t)$ est une fonction réelle et paire. On appelle* ***cosinus-transformée de Fourier*** *de $f$, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt.$$

*En effet, en séparant le domaine d'intégration en $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$, il vient en faisant le changement de variable $u = -t$ dans la seconde intégrale ;*

$$
\begin{aligned}
F(\alpha) &= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt - \int_{+\infty}^{0} f(-u)e^{i2\pi\alpha u}du \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\alpha t}dt \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt.
\end{aligned}
$$