La transformée de Fourier est donnée par :

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-t}e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{t}e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i2\pi\alpha)}dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i2\pi\alpha)}dt \\
&= \Big[\frac{e^{t(1-i2\pi\alpha)}}{1-i2\pi\alpha}\Big]_{-\infty}^{0} + \Big[\frac{e^{-t(1+i2\pi\alpha)}}{-(1+i2\pi\alpha)}\Big]_{0}^{+\infty} \\
&= \frac{2}{1+4\pi^2\alpha^2}.
\end{aligned}$$

Exemple 2.1.3 *Montrer que la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac centrée en t_0, notée $\delta_{t_0}(t) = \delta(t-t_0)$ est $F(\alpha) = 1$, pour $t_0 = 0$. La transformée de l'impulsion de Dirac est donnée par :*

$$F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_{t_0}(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt = e^{-i2\pi\alpha t_0}.$$

On peut en particulier noter que s'il s'agit de l'impulsion centrée en l'origine, la transformée est $F(\alpha) = 1$.

2.2 Cosinus et Sinus- Transformées de Fourier

Définition 2.2.1 *Si la fonction $f(t)$ est réelle et paire, la transformée de Fourier de $f(t)$ est une fonction réelle et paire. On appelle* ***cosinus-transformée de Fourier*** *de f, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt.$$

En effet, en séparant le domaine d'intégration en $\mathbb{R} = \mathbb{R}^- \cup \mathbb{R}^+$, il vient en faisant le changement de variable $u = -t$ dans la seconde intégrale ;

$$\begin{aligned}
F(\alpha) &= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt - \int_{+\infty}^{0} f(-u)e^{i2\pi\alpha u}du \\
&= \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\alpha t}dt \\
&= 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\alpha t)dt.
\end{aligned}$$

La fonction *cosinus* étant paire, on a bien $F(-\alpha) = F(\alpha)$, et de toute évidence $F(\alpha)$ est réelle.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et paire, alors $F(\alpha)$ sera imaginaire et paire.

Définition 2.2.2 *De la même manière si $f(t)$ est réelle et impaire, alors la transformée de Fourier de $f(t)$ est imaginaire et paire. On appelle **sinus-transformée de Fourier** de f, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\alpha t) dt.$$

En effet :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt + \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t) e^{-i2\pi\alpha t} dt - \int_0^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\alpha t} dt \\ &= 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\alpha t) dt. \end{aligned}$$

La fonction *sinus* étant impaire, on a bien $F(-\alpha) = -F(\alpha)$, et $F(\alpha)$ est visiblement imaginaire.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et impaire, alors $F(\alpha)$ sera réelle et paire.

2.3 Propriétés des transformées de Fourier

Quelques propriétés utiles de la transformée de Fourier seront établies dans cette section. Pour cela on considère une fonction $f(t)$ telle que sa transformée de Fourier $F(\alpha)$ existe, et que la transformée de Fourier inverse de $F(\alpha)$ est $f(t)$. Autrement dit :

$$F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) \;\; et \;\; f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)).$$

2.3.1 Linéarité

La transformée de Fourier (et son inverse) est définie par une intégrale. L'intégrale étant linéaire, la transformée de Fourier (et son inverse) est linéaire. Pour tout couple de scalaires α et β, on a :

$$\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{F}(f(t)) + \beta \mathcal{F}(g(t)).$$