La fonction *cosinus* étant paire, on a bien $F(-\alpha) = F(\alpha)$, et de toute évidence $F(\alpha)$ est réelle.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et paire, alors $F(\alpha)$ sera imaginaire et paire.

Définition 2.2.2 *De la même manière si $f(t)$ est réelle et impaire, alors la transformée de Fourier de $f(t)$ est imaginaire et paire. On appelle **sinus-transformée de Fourier** de f, la fonction :*

$$F(\alpha) = 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\alpha t)dt.$$

En effet :

$$\begin{aligned} F(\alpha) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt + \int_{-\infty}^{0} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\ &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-i2\pi\alpha t}dt - \int_0^{+\infty} f(t)e^{i2\pi\alpha t}dt \\ &= 2i \int_0^{+\infty} f(t) \sin(2\pi\alpha t)dt. \end{aligned}$$

La fonction *sinus* étant impaire, on a bien $F(-\alpha) = -F(\alpha)$, et $F(\alpha)$ est visiblement imaginaire.

Un raisonnement analogue, permet de conclure que si $f(t)$ est imaginaire et impaire, alors $F(\alpha)$ sera réelle et paire.

2.3 Propriétés des transformées de Fourier

Quelques propriétés utiles de la transformée de Fourier seront établies dans cette section. Pour cela on considère une fonction $f(t)$ telle que sa transformée de Fourier $F(\alpha)$ existe, et que la transformée de Fourier inverse de $F(\alpha)$ est $f(t)$. Autrement dit :

$$F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t)) \ \ et \ \ f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\alpha)).$$

2.3.1 Linéarité

La transformée de Fourier (et son inverse) est définie par une intégrale. L'intégrale étant linéaire, la transformée de Fourier (et son inverse) est linéaire. Pour tout couple de scalaires α et β, on a :

$$\mathcal{F}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha\mathcal{F}(f(t)) + \beta\mathcal{F}(g(t)).$$

De même pour la transformée inverse, on a :

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha \mathcal{F}^{-1}(f(t)) + \beta \mathcal{F}^{-1}(g(t)).$$

2.3.2 Transformée de Fourier de la translation

La transformée de Fourier d'une fonction translatée de a est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t-a)) = e^{-2i\pi\alpha a}\mathcal{F}(f(t)).$$

Preuve. Avec le changement de variable : $u = t - a$, on trouve

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t-a)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-a)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\alpha(u+a)}du \\
&= e^{-i2\pi\alpha a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)(t)e^{-i2\pi\alpha u}du \\
&= e^{-2i\pi\alpha a}\mathcal{F}(f(t)).
\end{aligned}$$

■

2.3.3 Transformée de Fourier de l'homothétie

La transformée de Fourier d'une fonction dont la variable subit une homothétie de rapport $k > 0$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{k}F(\frac{\alpha}{k}).$$

Preuve. Par le changement de variable : $u = kt$ on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(kt)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(kt)e^{-i2\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\alpha(\frac{u}{k})}\frac{du}{k} \\
&= \frac{1}{k}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)e^{-i2\pi\frac{\alpha}{k}u}du \\
&= \frac{1}{k}F(\frac{\alpha}{k}).
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.1 *Pour un rapport k négatif, nous avons :* $\mathcal{F}(f(kt)) = \frac{1}{|k|}F(\frac{\alpha}{k})$

2.3.4 Conjugaison

La transformée de Fourier du conjugué d'une fonction $f(t)$ est :

$$\mathcal{F}(\overline{f(t)}) = \overline{F(-\alpha)}.$$

Le conjugué d'un produit étant le produit des conjugués, on a :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\overline{f(t)}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(t)} e^{-i2\pi\alpha t} dt \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi\alpha t} dt} \\
&= \overline{F(-\alpha)}.
\end{aligned}$$

2.3.5 Transformée de Fourier d'une fonction modulée

La transformée de Fourier d'un signal $f(t)$ modulé par $e^{2i\pi\alpha_0 t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(e^{2i\pi\alpha_0 t} f(t)) = F(\alpha - \alpha_0).$$

Cette propriété se montre en reconnaissant la transformée de Fourier de $f(t)$ où α est remplacé par $\alpha - \alpha_0$.

2.3.6 Transformée de Fourier de la dérivée d'une fonction

La transformée de Fourier de la dérivée $f'(t)$ d'une fonction $f(t)$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = 2i\pi\alpha F(\alpha).$$

Preuve. Pour établir ce résultat, il faut intégrer par parties l'intégrale définissant la transformée de Fourier de la dérivée :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \Big[f(t)e^{-2i\pi\alpha t}\Big]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} 2i\pi\alpha f(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt. \tag{2.2}$$

La fonction $f(t)$ étant intégrable sur $\mathbb{R}$, cela implique que sa limite est nulle pour $t \to -\infty$ et $t \to +\infty$. De ce fait, le premier terme du membre de droite de (2.2) est nul, et il vient :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = 2i\pi\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2i\pi\alpha t} dt = 2i\pi\alpha F(\alpha).$$

■

Généralisation : Ce résultat se généralise pour les dérivées successives de $f(t)$ à condition qu'elle vérifient les conditions d'existence de la transformée de Fourier. En effet, on démontre facilement par récurrence que :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\Big) = (2i\pi\alpha)^n F(\alpha).$$

Cette propriété est fondamentale car elle permet de résoudre simplement certaines équations différentielles. En particulier, si on considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre n où $y(t)$ est inconnue et où le terme forcé est $u(t)$:

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + ... + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = u(t).$$

La transformée de Fourier étant linéaire, la transformée de Fourier de cette équation est un polynôme d'ordre n en α :

$$a_n (2i\pi\alpha)^n Y(\alpha) + a_{n-1}(2i\pi\alpha)^{n-1} Y(\alpha) + ... + a_1 2i\pi Y(\alpha) = U(t).$$

Il est alors facile de déduire $Y(\alpha)$ et d'en déduire, à l'aide d'une transformée inverse, la solution $y(t)$ de l'équation différentielle.

2.3.7 Dérivation de la transformée de Fourier

La dérivation de $F(\alpha)$ par rapport à la variable α donne :

$$\frac{dF(\alpha)}{d\alpha} = F(-2i\pi t f(t)).$$

Il suffit de dériver sous le signe d'intégration la transformée de Fourier.
Ce résultat se généralise aux dérivées successives de $F(\alpha)$ par :

$$\frac{d^n F(\alpha)}{d\alpha^n} = F((-2i\pi t)^n f(t)).$$

2.3.8 Convolution

Définition 2.3.1 (Produit de convolution) . *Soient $f(t)$ et $g(t)$ deux fonctions absolument intégrables. Le produit de convolution de $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$ est défini par :*

$$f(t) \star g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

Il est évident que le produit de convolution est linéaire en $f(t)$ et en $g(t)$, car il est défini par une intégrale.
La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit usuel des transformées de Fourier de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).$$

Preuve. Ce résultat se prouve par des changements de variable successifs, dans un premier temps on pose $u = t - \tau$, ensuite on fait $v = t - u$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-2i\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)e^{-2i\pi\alpha(t-u+u)}dudt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u)e^{-2i\pi\alpha(v+u)}dudv \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-2i\pi\alpha v}dv\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-2i\pi\alpha u}du\Big) \\
&= \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

On peut démontrer de manière analogue que la transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est le produit de convolution des transformées de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t)g(t)) = \mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(g(t)).$$

2.4 Théorème de Parseval-Plancherel

De manière similaire on montre au cas des séries de Fourier, l'énergie d'un signal temporel est égale à l'énergie de sa transformée de Fourier. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de Parseval.

Théorème 2.4.1 *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie et $F(\alpha)$ sa transformée de Fourier, également à énergie finie. Les fonctions $f(t)$ et $F(\alpha)$ ont la même énergie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha.$$