Il est évident que le produit de convolution est linéaire en $f(t)$ et en $g(t)$, car il est défini par une intégrale.
La transformée de Fourier d'un produit de convolution de deux fonctions est le produit usuel des transformées de Fourier de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).$$

Preuve. Ce résultat se prouve par des changements de variable successifs, dans un premier temps on pose $u = t - \tau$, ensuite on fait $v = t - u$. Il vient alors :

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(t) \star g(t)) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau e^{-2i\pi\alpha t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u)g(u)e^{-2i\pi\alpha(t-u+u)}dudt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)g(u)e^{-2i\pi\alpha(v+u)}dudv \\
&= \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} f(v)e^{-2i\pi\alpha v}dv\Big)\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-2i\pi\alpha u}du\Big) \\
&= \mathcal{F}(f(t)).\mathcal{F}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

On peut démontrer de manière analogue que la transformée de Fourier d'un produit de deux fonctions est le produit de convolution des transformées de chaque fonction :

$$\mathcal{F}(f(t)g(t)) = \mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(g(t)).$$

2.4 Théorème de Parseval-Plancherel

De manière similaire on montre au cas des séries de Fourier, l'énergie d'un signal temporel est égale à l'énergie de sa transformée de Fourier. Ce résultat est connu sous l'appellation de théorème de Parseval.

Théorème 2.4.1 *Soit $f(t)$ une fonction à énergie finie et $F(\alpha)$ sa transformée de Fourier, également à énergie finie. Les fonctions $f(t)$ et $F(\alpha)$ ont la même énergie :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha.$$

Preuve. Pour prouver ce résultat, on peut commencer par remarquer, la valeur particulière de $F(\alpha)$ quand $\alpha = 0$:

$$F(\alpha = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

En considérant la fonction $f(t)\overline{f(t)}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \left[\mathcal{F}\Big(f(t)\overline{f(t)}\Big)\right]_{\alpha=0}.$$

On sait que $f(t)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$, et on a établi que la transformée d'un produit est le produit de convolution des transformées, et que la transformée du conjugué de $f(t)$ est $\mathcal{F}\Big(\overline{f(t)}\Big) = \overline{F(-\alpha)}$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \left[\mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(\overline{f(t)})\right]_{\alpha=0} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(-(\alpha-\tau))}d\tau\right]_{\alpha=0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

or $F(\tau)\overline{F(\tau)} = |F(\tau)|^2$, ce qui achève notre preuve. ∎

De façon similaire on peut prouver que pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et leurs transformées de Fourier respectives $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$, lorsque les intégrales suivantes sont définies, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha.$$

2.5 Applications

2.5.1 Equations différentielles ordinaires

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est à coéfficients constants, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique. La transformation de Fourier est à utiliser lorsque l'équation est posée sur tout $\mathbb{R}$. Si les données de l'équation sont périodiques, on utilise plûtot les séries de Fourier. Si l'équation est posée sur une demi-droite avec conditions initiales pour la solution recherchée, on utilise plûtot la transformation de Laplace.