Preuve. Pour prouver ce résultat, on peut commencer par remarquer, la valeur particulière de $F(\alpha)$ quand $\alpha = 0$:

$$F(\alpha = 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt.$$

En considérant la fonction $f(t)\overline{f(t)}$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{f(t)}dt = \left[\mathcal{F}\Big(f(t)\overline{f(t)}\Big)\right]_{\alpha=0}.$$

On sait que $f(t)\overline{f(t)} = |f(t)|^2$, et on a établi que la transformée d'un produit est le produit de convolution des transformées, et que la transformée du conjugué de $f(t)$ est $\mathcal{F}\Big(\overline{f(t)}\Big) = \overline{F(-\alpha)}$, donc :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt &= \left[\mathcal{F}(f(t)) \star \mathcal{F}(\overline{f(t)})\right]_{\alpha=0} \\
&= \left[\int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(-(\alpha-\tau))}d\tau\right]_{\alpha=0} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau)\overline{F(\tau)}d\tau.
\end{aligned}$$

or $F(\tau)\overline{F(\tau)} = |F(\tau)|^2$, ce qui achève notre preuve. ∎

De façon similaire on peut prouver que pour deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ et leurs transformées de Fourier respectives $F(\alpha)$ et $G(\alpha)$, lorsque les intégrales suivantes sont définies, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha.$$

2.5 Applications

2.5.1 Equations différentielles ordinaires

La transformation de Fourier permet de résoudre explicitement une équation différentielle linéaire en la transformant en une équation plus simple. Par exemple, si l'équation du départ est à coéfficients constants, la transformée de Fourier de cette équation est une équation algébrique. La transformation de Fourier est à utiliser lorsque l'équation est posée sur tout $\mathbb{R}$. Si les données de l'équation sont périodiques, on utilise plûtot les séries de Fourier. Si l'équation est posée sur une demi-droite avec conditions initiales pour la solution recherchée, on utilise plûtot la transformation de Laplace.

Pour la résolution des équations différentielles linéaires à coéfficients constants, on utilise les propriétés suivantes de la transformation de Fourier :

Proposition 2.5.1 *Soient* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrables,* $f \longrightarrow^{\mathcal{F}} F$, $g \longrightarrow^{\mathcal{F}} G$ *et* $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$. *Alors*

$$\begin{array}{lll} \dfrac{df}{dt} & \longrightarrow^{\mathcal{F}} & (2i\pi\alpha)F(\alpha) \\ \dfrac{d^2f}{dt^2} & \longrightarrow^{\mathcal{F}} & (2i\pi\alpha)^2F(\alpha) = -4\pi^2\alpha^2F(\alpha) \\ \dfrac{d^3f}{dt^3} & \longrightarrow^{\mathcal{F}} & (2i\pi\alpha)^3F(\alpha) = -8i\pi^3\alpha^3F(\alpha) \\ etc... & & \end{array}$$

Preuve. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$ et la formule d'intégration par parties. ■

Lorsque les coéffcients de l'équation différentielle dépendent de t de facon linéaire (voir polynômiale), on utilise également la caractérisation suivante :

Proposition 2.5.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable,* $f \longrightarrow^{\mathcal{F}} F$. *Alors*

$$\begin{array}{lll} tf(t) & \longrightarrow^{\mathcal{F}} & \dfrac{i}{2\pi}\dfrac{dF(\alpha)}{d\alpha} \\ t^2f(t) & \longrightarrow^{\mathcal{F}} & \left(\dfrac{i}{2\pi}\right)^2 \dfrac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2} = \dfrac{-1}{(2\pi)^2}\dfrac{d^2F(\alpha)}{d\alpha^2}. \end{array}$$

Preuve. Utiliser la définition de $\mathcal{F}$ et la formule $te^{-2i\pi\alpha t} = \frac{i}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\alpha}(e^{-2i\pi\alpha t})$, et les propriétés des intégrales dépendant d'un paramètre. ■

Exemple 2.5.1 *Trouver une fonction* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable sur* $\mathbb{R}$ *telle que*

$$-\frac{d^2f}{dt^2}(t) + f(t) = e^{-t^2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La transformée de Fourier de l'équation ci-dessus s'écrit

$$4\pi^2\alpha^2F(\alpha) + F(\alpha) = \mathcal{F}(e^{-t^2}),$$

où l'inconnue est $F = \mathcal{F}(f)$. *On en déduit que*

$$F(\alpha) = \frac{1}{1+4\pi^2\alpha^2}\mathcal{F}(e^{-t^2}) = \frac{1}{2}\mathcal{F}(e^{-|t|})\mathcal{F}(e^{-t^2}),$$

la dernière égalité étant une conséquence de $e^{-|t|} \longrightarrow^{\mathcal{F}} \frac{2}{1+(2\pi\alpha)^2}$ *(voir l'exemple (2.1.2)). Donc*

$$F = \frac{1}{2}\mathcal{F}\Big(e^{-|t|} \star e^{-t^2}\Big) \Longrightarrow f(t) = \frac{1}{2}\Big(e^{-|t|} \star e^{-t^2}\Big),$$

puisque $\mathcal{F}$ *est injective.*

Exemple 2.5.2 *À l'aide de la transformation de Fourier trouver une solution particulière de l'équation différentielle d'ordre deux suivante :*

$$(E) \qquad y'' + 2\pi t y' + 4\pi y = 0 \tag{2.3}$$

Supposons que $Y(\alpha)$ *est la transformée de Fourier de* $y(t)$. *Alors La transformée de Fourier de l'équation (2.3) s'écrit*

$$\begin{aligned} \mathcal{F}((E)) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (2i\pi\alpha)^2 Y(\alpha) + 4\pi Y(\alpha) + 2\pi\Big(\frac{-1}{2i\pi}\Big)\Big[2i\pi\alpha Y(\alpha)\Big]' = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad Y(\alpha)\Big[-4\pi^2\alpha^2 + 2\pi\Big] - 2\pi\alpha Y'(\alpha) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad -\alpha Y'(\alpha) + (-2\pi\alpha^2 + 1)Y(\alpha) = 0. \end{aligned}$$

Cette dernière équation différentielle est linéaire sans second membre. La solution est

$$Y(\alpha) = k\alpha e^{-\pi\alpha^2} \Longrightarrow y(t) = \mathcal{F}^{-1}(Y(\alpha)) = k'(e^{-\pi t^2})' = k'' t e^{-\pi t^2}.$$

2.5.2 Equations différentielles aux dérivées partielles

Equation de la chaleur

Transformer par rapport à x l'équation de la chaleur suivante,

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \qquad (t,x) \in]0,+\infty[\times\mathbb{R}\,; \\ \\ u(0,x) = u_0(x), \quad u_0 \in L^1(\mathbb{R}). \end{cases} \tag{2.4}$$

En effet :

$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}(u(t,x))$$
$$\mathcal{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)(t,x) = (2i\pi\alpha)^2\mathcal{F}(u(t,x)).$$

Alors la transformée de Fourier de l'équation (2.4) s'écrit

$$\partial_t \mathcal{F}(u(t,x)) - (2i\pi\alpha)^2\mathcal{F}(u(t,x)) = 0,$$

est une équation du première ordre en t l'on sait intégrer

$$\partial_t \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 \mathcal{F}(u(t,x))$$

$$\ln \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 t + c$$

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = k e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

on a :

$$\begin{aligned} u(0,x) = u_0(x) &\implies \mathcal{F}(u(0,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) \\ \mathcal{F}(u(0,x)) = k &\implies k = \mathcal{F}(u_0(x)), \end{aligned}$$

par suite,

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) e^{(2i\pi\alpha)^2 t}.$$

Remarquons que l'on a :

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x) \star f(t)) \qquad avec \qquad f(t) = e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

et par injectivité de la transformée de Fourier on obtient,

$$u(t,x) = u_0(x) \star f(t) = u_0(x) \star e^{-4\pi^2\alpha^2 t}.$$

2.6 Transformée de Fourier des fonctions usuelles

Le tableau suivant présente l'expression des transformées de Fourier pour quelques fonctions usuelles.