est une équation du première ordre en t l'on sait intégrer

$$\partial_t \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 \mathcal{F}(u(t,x))$$

$$\ln \mathcal{F}(u(t,x)) = (2i\pi\alpha)^2 t + c$$

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = k e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

on a :

$$\begin{aligned} u(0,x) = u_0(x) &\implies \mathcal{F}(u(0,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) \\ \mathcal{F}(u(0,x)) = k &\implies k = \mathcal{F}(u_0(x)), \end{aligned}$$

par suite,

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x)) e^{(2i\pi\alpha)^2 t}.$$

Remarquons que l'on a :

$$\mathcal{F}(u(t,x)) = \mathcal{F}(u_0(x) \star f(t)) \qquad avec \qquad f(t) = e^{(2i\pi\alpha)^2 t},$$

et par injectivité de la transformée de Fourier on obtient,

$$u(t,x) = u_0(x) \star f(t) = u_0(x) \star e^{-4\pi^2\alpha^2 t}.$$

2.6 Transformée de Fourier des fonctions usuelles

Le tableau suivant présente l'expression des transformées de Fourier pour quelques fonctions usuelles.

$f(t)$	$F(\alpha)$	$f(t)$	$F(\alpha)$
$e^{-at^2},\ a>0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp(-\frac{\pi^2\alpha^2}{a})$	$\Lambda_T(t)$	$T(sinc(\alpha T))^2$
$e^{-a\|t\|},\ a>0$	$\frac{2a}{a^2+4\pi^2\alpha^2}$	$sinc(t)$	$\Pi_1(\alpha)$
$e^{-at}u(t),\ a>0$	$\frac{1}{a+2i\pi\alpha}$	$\delta(t-t_0)$	$e^{-2i\pi\alpha t_0}$
$\frac{1}{t^2+a^2}$	$\frac{\pi}{a}e^{-2\pi a\|\alpha\|}$	$\delta^{(n)}(t)$	$(2i\pi\alpha)^n$
Π_T	$Tsinc(\alpha T)$	$e^{2i\pi\alpha_0 t}$	$\delta(\alpha-\alpha_0)$

La fonction Π_T est la fonction porte : $\Pi_T(t) = u(t+\frac{T}{2}) - u(t-\frac{T}{2})$.
La fonction Λ_T est lafonction triangle : $\Lambda_T(t) = (1-\frac{|t|}{T})u(T-|t|)$.
La fonction *sinc* est la fonction *sinus cardinal* :$t \longrightarrow sinc(t) = \frac{sin(\pi t)}{\pi t}$.

Lecture inversee de la table : Si $F(\alpha) = \mathcal{F}(f(t))$ et $F \in \mathcal{L}^1$, alors : $\mathcal{F}(F(t)) = f(-\alpha)$ et $\mathcal{F}^{-1}(f(\alpha)) = F(-t)$.