

TD 01: Transformations intégrales dans les espaces L^p

Exercice 1: Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue dx . On définit l'exposant conjugué de p par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec $\frac{1}{\infty} = 0$.

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω valeurs dans $\mathbb{R}$. On pose

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\Omega} |f(x)| dx$$

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$; on pose $L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$.
 On note

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

On pose $L^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et il existe une constante } C : |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$
 On note

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}$$

- (1) On suppose que $1 < p < +\infty$. Démontrer que pour tous $a, b \in [0, +\infty[$, on a **l'inégalité de Young**

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

- (2) A partir de **l'inégalité de Young**, déduire **l'inégalité de Hölder** pour les fonctions mesurables f, g sur Ω :

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

- (3) En utilisant (2) Démontrer **l'inégalité de Minkowski** pour les fonctions mesurables f, g sur Ω .

$$\left(\int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- (4) Dédurre que L^p est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

Exercice 2: Supposons que Ω de mesure finie ($|\Omega| < \infty$) et soit $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Démontrer que $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec une injection continue. Plus précisément, montrer que

$$\|f\|_p \leq |\Omega|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q \quad \forall f \in L^q(\Omega).$$

[**Indice:** Utilisez l'inégalité de Hölder]

Exercice 3: Soit $C[0, 1]$ l'espace de toutes les fonctions continues sur $[0, 1]$.

- (1) Démontrer que si $C[0, 1]$ est équipé de la norme uniforme

$$\|f\| = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|, \quad f \in C[0, 1]$$

alors $C[0, 1]$ est un espace de Banach (c'est-à-dire un espace vectoriel normé complet).

- (2) Donner un exemple montrant que $C[0, 1]$ équipé de la norme L^1

$$\|\cdot\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx, \quad f \in C[0, 1]$$

n'est pas un espace de Banach.

Exercice 4: Etudier l'appartenance à $L^1(\mathbb{R})$ et à $L^2(\mathbb{R})$ des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \sin(x) 1_{[-\pi, \pi]} \quad , \quad f_2(x) = \frac{\sin(x)}{x} 1_{[1, +\infty[} \quad , \quad f_3(x) = e^{-a|x|} \quad (a > 0)$$

Exercice 5: Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$. On pose, pour $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt.$$

- (1) Démontrer que

$$\left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \int_0^x \sqrt{t} |f(t)|^2 dt.$$

- (2) En déduire que $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$.

Exercice 6: (Pour les étudiants) Démontrer que toute boule dans un espace normé X est convexe.

Exercice 7: (Pour les étudiants) Démontrer que L^p est un espace de Banach pour tout $1 \leq p \leq \infty$.

①

Corrigé type Série N°1Exercice N°1

on suppose $1 < p < +\infty$. On montre que pour tous $a, b \in [0, +\infty[$, on a l'inégalité de Young

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

On utilise la définition d'une fonction concave.
 la fonction $\ln x$ est une fonction concave sur $]0, +\infty[$ c.à.d. $\forall x, y \in]0, +\infty[$
 $\ln(\alpha x + \beta y) \geq \alpha \ln x + \beta \ln y$
 avec $\alpha + \beta = 1$

donc pour $\alpha = \frac{1}{p}$ et $\beta = \frac{1}{q}$
 on a $\alpha + \beta = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

on pose $x = a^p$ et $y = b^q$

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{q} b^q\right) &\geq \\ &\frac{1}{p} \ln(a^p) + \frac{1}{q} \ln(b^q) \\ &\geq \ln(a^p)^{\frac{1}{p}} + \ln(b^q)^{\frac{1}{q}} \\ &= \ln(a) + \ln(b) \\ &= \ln(ab) \end{aligned}$$

puisque $x \mapsto e^x$ est une fonction croissante on obtient

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

2) A partir de l'inégalité de Young, on déduit l'inégalité de Hölder

$$\int_{\mathcal{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

1) Si $\|f\|_p = 0$ ou $\|g\|_q = 0$ alors $f = 0_{\mathcal{P}, p}$ sur $\mathcal{R}$ ou $g = 0_{\mathcal{P}, p}$ sur $\mathcal{R}$. On déduit que $fg = 0_{\mathcal{P}, p}$ sur $\mathcal{R}$ donc $\|fg\|_1 = 0$ et enfin l'inégalité de Hölder se réduit à l'inégalité triviale $0 \leq 0$ donc est vérifiée.

Nous pouvons donc supposer que $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$

Poseons :

$$a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad \text{et} \quad b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

alors d'après l'inégalité

2) de Youngona

$$\int \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} dx \leq \left(\int \frac{|f(x)|^p}{p \|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q \|g\|_q^q} \right) dx \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int |f(x)|^p dx = \|f\|_p^p + \frac{1}{q \|g\|_q^q} \int |g(x)|^q dx = \|g\|_q^q \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$\Rightarrow \int |f(x)| |g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

et comme $|fg| = |f| \cdot |g|$

donc on a le resultat:

$$\int |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

3) on utilise l'inégalité de Hölder pour démontrer

l'inégalité de Minkowski

$$\left(\int |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\text{ona: } (f+g)^p = (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1} \Rightarrow |f+g|^p \leq |f| |f+g|^{p-1} + |g| |f+g|^{p-1}$$

on applique l'inégalité de Hölder on obtient

$$\int |f(x)+g(x)|^p dx \leq \int |f(x)| |f(x)+g(x)|^{p-1} dx + \int |g(x)| |f(x)+g(x)|^{p-1} dx \leq \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} + \left(\int |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q} = \left(\left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p dx \right)^{1/p} \right) \left(\int |f(x)+g(x)|^{q(p-1)} dx \right)^{1/q}$$

$$\text{avec } q(p-1) = p$$

finalement on obtient:

$$\left(\int |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq \left(\int |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{1-1/q} \left(\int |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

3) On déduit que $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_p$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq \infty$

i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall f \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda f \in L^p(\mathbb{R})$
 on a $\|\lambda f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |\lambda f(x)|^p dx \right)^{1/p}$
 $= |\lambda| \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$
 $= |\lambda| \|f\|_p < \infty \Rightarrow \lambda f \in L^p(\mathbb{R})$

ii) $\forall f, g \in L^p(\mathbb{R}) \Rightarrow f+g \in L^p(\mathbb{R})$
 puisque $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ alors on a $\|f\|_p < \infty$ et $\|g\|_p < \infty$
 d'après l'inégalité de Minkowski
 $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p < \infty$
 $\Rightarrow f+g \in L^p(\mathbb{R})$
 donc $L^p(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

* l'application $\|\cdot\|_p : f \mapsto \|f\|_p$ est une semi-norme car

1) $\|f\|_p \geq 0$

2) $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$

3) $\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

4) $\|f\|_p = 0 \Leftrightarrow f = 0$

on a $f = 0 \Rightarrow \|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$

$= \left(\int_{\mathbb{R}} |0|^p dx \right)^{1/p} = 0$

on suppose que $\|f\|_p = 0$

$\Rightarrow \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} = 0$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx = 0 \Rightarrow$

$f = 0$ p.p. sur $\mathbb{R}$

Exercice N°2:

On démontre que $L^q(\mathbb{R}) \subset L^p(\mathbb{R})$ avec une injection continue plus précisément, on montre que $\|f\|_p \leq \|f\|_q |\mathbb{R}|^{1/p - 1/q}$
 $\forall f \in L^q(\mathbb{R})$

ou $\mathbb{R}$ mesure finie ($|\mathbb{R}| < \infty$) et $1 \leq p \leq q \leq +\infty$

en réalité on montre que $\forall f \in L^q(\mathbb{R}) \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R})$

supposons que $1 \leq p < q$
 "Car pour $p=q$ l'inégalité est triviale"

on applique l'inégalité de Hölder avec les exposants

$r = \frac{q}{p} > 1$ (car $1 \leq p < q \Rightarrow \frac{q}{p} > 1$)

et $r' = \frac{q}{q-p}$ avec $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$

4) donc

$$\begin{aligned}\|f\|_P^P &= \int_r |f(x)|^P dx = \int_r |f(x)| \cdot 1 dx \\ &\leq \left(\int_r |f(x)|^{P \cdot \frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \left(\int_r 1^{\frac{q}{q-p}} dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \\ &\leq \left(\int_r |f(x)|^q dx \right)^{\frac{q-p}{q}} \cdot |r|^{1 - \frac{p}{q}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \|f\|_P &\leq \left(\int_r |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} |r|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \\ &\leq \|f\|_{L^q} \cdot |r|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Comme $1 \leq p < q \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{1}{q} > 0$

alors $|r|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} < \infty$

finallement on a $\|f\|_P < \infty$
 $\Rightarrow f \in L^P(r)$

De plus l'inégalité ci-dessus
montre que l'inclusion de
 $L^q(r)$ dans $L^p(r)$ est continue

Exercice N°3:

on montre que $C[0,1]$ est un
espace de Banach sur $[0,1]$
muni de la norme $\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|$
il s'agit de montrer que $C[0,1]$
est un espace complet. Pour
cela, considérons une suite
de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $C[0,1]$

et montrons qu'elle converge
uniformement dans $C[0,1]$
vers une fonction $f \in C[0,1]$
D'après le critère de Cauchy
pour tout $\varepsilon > 0$, il existe
un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour

tout $n, m \geq N$ on a

$$\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$$

donc pour tout $x \in [0,1]$ on a
 $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$

Il s'ensuit que la suite numé-
rique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy
dans $\mathbb{R}$ complet, ce qui assure
qu'il existe un nombre
réel $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que
 $f_n(x) \rightarrow f(x)$ dans $\mathbb{R}$.

Donc on fixe $n \in \mathbb{N}$ et par
passage à la limite $m \rightarrow \infty$
il vient que $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$
ce qui assure que f_n

converge uniformément
vers f sur $[0,1]$ de sorte
que f est continue c-à-d
 $f \in C[0,1]$ alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

5) 2) On donne un exemple montrant que $C[0,1]$ muni de la norme de $L^1([0,1])$

$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx$ $\forall f \in C[0,1]$ n'est pas un espace de Banach. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ 1 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

on a la suite (f_n) est de Cauchy par rapport à la norme $L^1([0,1])$ mais elle converge vers

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

qui n'est pas continue c-à-d $f \notin C([0,1])$ donc l'espace $C([0,1])$ muni de la norme de $L^1([0,1])$ n'est pas un espace de Banach.

Exercice N°4

Nous étudions :

1) $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin x| dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} |\sin x| dx = 2 \int_0^{\pi} \sin x dx = -2 \cos x \Big|_0^{\pi} = 4 < \infty$$

Donc $f_1 \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\sin x|^2 dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2} \sin 2x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi < \infty$$

Donc $f_1 \in L^2(\mathbb{R})$.

2) $f_2 \in L^1(\mathbb{R})$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_2(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$$

on intègre par partie on a

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x} \right]_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx$$

on a $\left| \frac{\cos x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$

donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$

$$6) \leq \left[-\frac{1}{n} \right]_1^{+\infty} = 1$$

finalement

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{n} \right| dx \leq \cos 1 - 1 < \infty$$

$$\Rightarrow f_2 \in L^1(\mathbb{R})$$

$$f_2 \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{n} \right|^2 dx$$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

$$\leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{+\infty}$$

$$= 1 < \infty$$

$$\text{Donc } f_2 \in L^2(\mathbb{R})$$

$$3) f_3 \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_3(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x|} dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{ax} dx + \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx$$

$$= \left[\frac{1}{a} e^{ax} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{1}{a} e^{-ax} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a} - 0 - (0 - \frac{1}{a}) = \frac{2}{a}$$

$$\text{Donc } f_3 \in L^1(\mathbb{R}) \text{ si } a > 0$$

$$f_3 \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_3(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2a|x|} dx$$

$$= \int_{-\infty}^0 e^{2ax} dx - \int_0^{+\infty} e^{-2ax} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2a} e^{2ax} \right]_{-\infty}^0 - \left[\frac{1}{2a} e^{-2ax} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2a} - 0 - (0 - \frac{1}{2a}) = \frac{1}{a}$$

$$\text{Donc } f_3 \in L^2(\mathbb{R}) \text{ si } a > 0$$

Exercice N°5

Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+)$ on pose pour

$$x > 0 : F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

$$1) \text{ on démontre que } \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2x \int_0^x |f(t)|^2 dt$$

on utilise l'inégalité de Cauchy Schwarz

$$\int_x |g(t)h(t)| dt \leq \left[\int_x |g(t)|^2 dt \right]^{1/2} \times \left[\int_x |h(t)|^2 dt \right]^{1/2}$$

Pour cela, on doit écrire

$$f(t) = g(t)h(t) \text{ avec}$$

$$h(t) = \sqrt{t} |f(t)|$$

On a donc

$$\int_0^x f(t) dt = \int_0^x t^{-1/4} t^{1/4} f(t) dt$$

$$\leq \left(\int_0^x t^{-1/2} dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x t^{1/2} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

⑦ $\leq \sqrt{2} x^{1/4} \left(\int_0^x t^{1/2} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$
 $\Rightarrow \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 \leq 2\sqrt{x} \cdot \int_0^x \sqrt{t} |f(t)|^2 dt$

2) on deduit que $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$
 c-à-d $\int_0^{+\infty} |F(x)|^2 dx < +\infty$

Pour cela on a
 $\int_0^{+\infty} |F(x)|^2 dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 dx$
 $\leq 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} \left(\int_0^x \sqrt{t} |f(t)|^2 dt \right) dx$

on applique le théorème de Fubini-Tonelli.

La condition $x \geq 0$ et $t \in [0, x]$
 se traduit en $t \geq 0$ et $x \in [t, +\infty[$, on trouve
 $\int_0^{+\infty} |F(x)|^2 dx \leq 2 \int_0^{+\infty} \sqrt{t} |f(t)|^2 \left(\int_t^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}} dx \right) dt$
 $\leq 2 \int_0^{+\infty} t^{1/2} |f(t)|^2 \times 2t^{-1/2} dt$
 $\leq 4 \int_0^{+\infty} |f(t)|^2 dt < +\infty$

on deduit que $F \in L^2(\mathbb{R}_+)$ et $\|F\|_2 \leq 2\|f\|_2$

Exercice N° 6

On montre que toute boule dans un espace normé X est convexe.

Soit $B(x_0, r)$ une boule quelconque de rayon $r > 0$

Centrée en $x_0 \in X$ et $x, y \in B(x_0, r)$, alors.

$\|x - x_0\| < r$ et $\|y - x_0\| < r$
 Pour tout $a \in [0, 1]$, on a

$$\begin{aligned} & \|ax + (1-a)y - x_0\| \\ &= \|a(x - x_0) + (1-a)(y - x_0)\| \\ &\leq a\|x - x_0\| + (1-a)\|y - x_0\| \\ &< ar + (1-a)r \\ &= r \end{aligned}$$

Alors $ax + (1-a)y \in B(x_0, r)$
 c-à-d que la boule $B(x_0, r)$ est convexe dans l'espace X

⑧ Corrigé type Exercice N° 7

1) Traitons d'abord le cas $p = +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^∞ . Etant donné un entier $k \geq 1$ il existe N_k tel que :

$$\|f_m - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}, \quad \forall m, n \geq N_k$$

Ceci implique qu'il existe E_k négligeable tel que

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus E_k, \quad \forall m, n \geq N_k$$

Enfin, posons $E = \bigcup_k E_k$ (E est négligeable). On voit que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus E$, la suite $f_n(x)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$.

Soit $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus E$. En passant à la limite dans

* quand $m \rightarrow \infty$ on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{k}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus E, \quad \forall n \geq N_k$$

par suite $f \in L^\infty$ et

$$\|f - f_n\|_{L^\infty} < \frac{1}{k}, \quad \forall n \geq N_k$$

et par suite $\|f - f_n\|_{L^\infty} \rightarrow 0$

2) Supposons maintenant que $1 \leq p < +\infty$.

Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p .

Pour conclure il suffit de montrer qu'une sous-suite extraite converge dans L^p .

On extrait une sous-suite

$$(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ de } (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

telles que pour tout $k \geq 0$, il existe un $n_{k+1} > n_k$ tel que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall k \geq 0$$

« On possède comme suit : Il existe n_1 tel que

$$\|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2} \text{ pour } m, n \geq n_1$$

on prend ensuite $n_2 \geq n_1$

$$\text{tel que } \|f_m - f_n\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^2} \text{ pour } m, n \geq n_2 \text{ etc... »}$$

On va montrer que f_{n_k}

9) Converge dans L^p .
 Pour simplifier les notations on écrit f_k au lieu de f_{n_k} de sorte que l'on a :

$$\|f_{k+1} - f_k\|_{L^p} \leq \frac{1}{2^k}, \forall k \geq 1$$

Posons : $g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|$
 il vient que $\|g_n\|_{L^p} \leq 1$

Du théorème de la convergence monotone, on en déduit que $g_n(x)$ converge vers une limite finie $g(x)$ avec $g \in L^p$

D'autre part, on a pour $m \geq n \geq 2$

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)|$$

$$\leq |f_{m-1}(x) - f_{m-2}(x)| \leq \dots \leq$$

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

Il en résulte que pp sur $\mathcal{R}$ $(f_n(x))$ est de Cauchy et converge vers une limite

noté $f(x)$.

On a pp sur $\mathcal{R}$

$$|f(x) - f_n(x)| \leq g(x),$$

pour $n \geq 2$

Il en résulte que $f \in L^p$

$$\text{Enfin : } \|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$$

En effet on a :

$$|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0 \text{ pp et}$$

$$|f_n(x) - f(x)|^p \leq g^p(x)$$

majorante intégrable

En conclusion : $L^p(\mathcal{R})$ est un espace de Banach

fin



Dr. Ali Khalaata