Chapitre 3

Transformation de Laplace

L'intérêt de la transformation de Laplace est d'offrir sensiblement les mêmes propriétés que la transformée de Fourier, mais dans un cadre moins restrictif. Ainsi de nombreuses fonctions dont les transformées de Fourier n'existent pas (car l'intégrale sur un support infini de ces fonctions ne sont pas définies) admettent une transformée de Laplace. Comme on le verra, pour obtenir ce résultat, l'intégrale comprend un terme supplémentaire, tendant vers 0 lorsque $t \to \infty$ afin de forcer la convergence de l'intégrale.

La transformée de Laplace est très utile pour résoudre des équations différentielles. En effet, on s'apercevra qu'une équation différentielle linéaire devient un polynôme. De plus les conditions initiales des problèmes différentiels sont très facilement prises en compte lors de la résolution par transformée de Laplace.

3.1 Définition et transformée inverse

La transformée de Laplace est essentiellement utilisée dans un cadre physique, c'est pourquoi on considère uniquement des signaux dits causaux, c'est à dire nuls pour $t < 0$.

Un grand nombre de fonctions usuelles $f(t)$ non intégrables sur $\mathbb{R}$ croissent moins vite que la fonction exponentielle lorsque $t \to \infty$, autrement dit même si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^+} f(t)dt$ n'existe pas, l'intégrale suivante est bien définie, pour un réel positif $a > 0$ suffisamment grand :

$$\int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}dt.$$

Dans ce cas, la transformée de Fourier du produit $f(t)e^{-\alpha t}$, avec $\alpha \geq a$ existe. La transformée de Fourier de $f(t)e^{-\alpha t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-\alpha t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\alpha t}dt.$$

Sachant que $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, et en notant $p = \alpha + i\omega = \alpha + i2\pi\alpha$, il vient :

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Définition 3.1.1 (Transformée de Laplace) *La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$, notée $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ est donnée par :*

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, on peut définir une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)).$$

Cette transformation inverse est définie comme suit.

Définition 3.1.2 (Transformée inverse de Laplace) *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ est donnée par :*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

On utilise très peu cette définition mathématique pour calculer des transformées inverses. Dans la plupart des applications on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace.

3.2 Propriétés des transformées de Laplace

Une fois établies quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation (respectivement, d'intégration) par rapport au temps t, à la multiplication (respectivement, la division) par la variable p.