formée de Fourier de $f(t)e^{-\alpha t}$ est donnée par :

$$\mathcal{F}(f(t)e^{-\alpha t}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-\alpha t}e^{-2i\pi\alpha t}dt.$$

Sachant que $f(t)$ est nulle pour $t < 0$, et en notant $p = \alpha + i\omega = \alpha + i2\pi\alpha$, il vient :

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Définition 3.1.1 (Transformée de Laplace) *La transformée de Laplace de la fonction causale $f(t)$, notée $F(p) = \mathcal{L}(f(t))$ est donnée par :*

$$F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

Comme dans le cas de la transformée de Fourier, on peut définir une transformation inverse, notée $\mathcal{L}^{-1}$, telle que :

$$F(p) = \mathcal{L}(f(t)) \Leftrightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)).$$

Cette transformation inverse est définie comme suit.

Définition 3.1.2 (Transformée inverse de Laplace) *La transformée inverse de Laplace de la fonction $F(p)$, notée $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p))$ est donnée par :*

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(p)e^{pt}dp,$$

où p, appelé variable de Laplace, est tel que l'intégrale existe ($\Re(p) \geq a$).

On utilise très peu cette définition mathématique pour calculer des transformées inverses. Dans la plupart des applications on parvient à se ramener à des formes répertoriées dans des tables où sont consignées des fonctions usuelles et leurs transformées de Laplace.

3.2 Propriétés des transformées de Laplace

Une fois établies quelques propriétés pratiques de la transformée de Laplace, on étudiera les propriétés fondamentales qui permettent de relier les opérations de dérivation (respectivement, d'intégration) par rapport au temps t, à la multiplication (respectivement, la division) par la variable p.

3.2.1 Linéarité

De par la linéarité de l'intégration, la transformée de Laplace est linéaire, autrement dit, pour tout couple de fonctions $f_1(t)$ et $f_2(t)$ telles que leurs transformées de Laplace convergent, et pour tout couple de constantes α et β, on vérifie :

$$\mathcal{L}(\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)) = \alpha\mathcal{L}(f_1(t)) + \beta\mathcal{L}(f_2(t)).$$

Il en est évidemment de même pour la transformée inverse. Pour tout couple de constantes α et β, on a :

$$\mathcal{L}^{-1}(\alpha F_1(p) + \beta F_2(p)) = \alpha\mathcal{L}(F_1(p)) + \beta\mathcal{L}(F_2(p)).$$

3.2.2 Translation dans l'espace de départ

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$ retardée de τ est donnée par :

$$\mathcal{L}(f(t-\tau)) = e^{-p\tau}\mathcal{L}(f(t)) = e^{-p\tau}F(p).$$

Preuve. Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = t - \tau$, $du = dt$, dans le calcul de la transformée de Laplace :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t-\tau)) &= \int_0^{+\infty} f(t-\tau)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} f(u)e^{-p(u+\tau)}du \\
&= e^{-p\tau}\int_0^{+\infty} f(u)e^{-pu}du \\
&= e^{-p\tau}F(p).
\end{aligned}$$

■

3.2.3 Dilatation ou contraction dans l'espace de départ

Pour un réel positif k, on a :

$$\mathcal{L}(f(kt)) = \frac{1}{k}F\left(\frac{p}{k}\right).$$

Cette égalité se prouve en posant le changement de variable $u = kt$, $du = kdt$, dans le calcul de la transformée de Laplace.

3.2.4 Transformée de Laplace d'une fonction modulée

La transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, modulée par e^{-at} est donnée par :

$$\mathcal{L}(e^{-at}f(t)) = F(p+a).$$

Le terme de modulation étant constant par rapport à la variable d'intégration, on peut le déplacer dans l'intégrale et faire apparaître la transformée de Laplace en $(p+a)$ au lieu de p.

3.2.5 Transformée de Laplace de la dérivée d'une fonction

Si on note $f(0)$ la valeur initiale de la fonction $f(t)$, la transformée de Laplace de la dérivée $\frac{df(t)}{dt}$ est donnée par la relation :

$$\mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = pF(p) + f(0).$$

Preuve. Cette relation se prouve en intégrant par parties la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$ et en se souvenant que $\Re(p) > 0$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{df(t)}{dt}\Big)e^{-pt}dt \\
&= \Big[f(t)e^{-pt}\Big]_0^{+\infty} + p\int_0^{+\infty} f(t))e^{-pt}dt \\
&= pF(p) + f(0).
\end{aligned}$$

■

3.2.6 Transformée de Laplace de la primitive d'une fonction

La transformée de Laplace de l'intégrale d'une fonction $f(t)$ est donnée par :

$$\mathcal{L}\Big(\int_0^t df(u)du\Big) = \frac{1}{p}F(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation, notons $\widetilde{f}(t)$, la primitive de $f(t)$ nulle en l'origine (i.e. $\frac{d\widetilde{f}(t)}{dt} = f(t)$, et $\widetilde{f}(0) = 0$), en intégrant par parties il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\Big(\int_0^t df(u)du\Big) &= \int_0^{+\infty} \widetilde{f}(t)e^{-pt}dt \\
&= \Big[-f(t)\frac{e^{-pt}}{p}\Big]_0^{+\infty} + \frac{1}{p}\int_0^{+\infty} f(t))e^{-pt}dt \\
&= \frac{1}{p}F(p).
\end{aligned}$$

■

3.2.7 Dérivation de la transformée de Laplace

En dérivant la transformée de Laplace dans l'intégrale, on obtient,

$$\frac{d\mathcal{L}(f(t))}{dp} = \mathcal{L}(-tf(t)).$$

Plus généralement, en dérivant n fois, on a :

$$\frac{d^n\mathcal{L}(f(t))}{dp^n} = \mathcal{L}((-t)^n f(t)).$$

3.2.8 Théorème de la valeur initiale

La valeur initiale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction à partir de la relation connue sous le nom de théorème de la valeur initiale.

Théorème 3.2.1 (Théorème de la valeur initiale) . *La valeur en $t = 0$ de $f(t)$ est donnée par :*

$$\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{p\to\infty} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to \infty$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$. On a :

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \lim_{p\to\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big),$$

et

$$\lim_{p\to\infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) = \lim_{p\to\infty} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt = 0,$$

d'où

$$\lim_{p\to\infty} \Big(pF(p) - f(0)\Big) = 0 \Longrightarrow \lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0) = \lim_{t\to 0} f(t).$$

■

3.2.9 Théorème de la valeur finale

La valeur finale d'une fonction $f(t)$ peut être obtenue à partir de la transformée de Laplace de la fonction en utilisant la relation connue sous l'appellation de théorème de la valeur finale.

Théorème 3.2.2 (Théorème de la valeur finale) . *La limite pour $t \to \infty$ de la fonction $f(t)$ est donnée par :*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

Preuve. Pour prouver cette relation on fait tendre $p \to 0$ dans l'expression de la transformée de Laplace de la dérivée de $f(t)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to 0} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \lim_{p\to 0} \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{df(t)}{dt} dt = [f(t)]_0^{+\infty} \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),
\end{aligned}$$

et on trouve,

$$\begin{aligned}
\lim_{p\to \infty} \mathcal{L}\Big(\frac{df(t)}{dt}\Big) &= \lim_{p\to 0} \Big(pF(p) - f(0)\Big) \\
&= \lim_{p\to 0} pF(p) - f(0) \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),
\end{aligned}$$

d'où

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{p\to 0} pF(p).$$

■

3.2.10 Transformée de Laplace d'un produit de convolution

Le produit de convolution de deux fonctions causales $f(t)$ et $g(t)$, noté $f(t) \star g(t)$, est défini par :

$$f(t) \star g(t) = \int_0^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau.$$

La transformée de Laplace du produit de convolution de deux fonctions est égale au produit usuel des transformées de Laplace des fonctions :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)).$$

Preuve. En effet on peut calculer :

$$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = \int_0^{+\infty} \Big(\int_0^{+\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\Big) e^{-pt} dt,$$

en posant le changement de variable $v = t - \tau$ (donc : $dv = dt$), et en séparant les variables des deux intégrales, nous aurons,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau)g(v)e^{-p(v+\tau)}d\tau dv \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau)e^{-p\tau}d\tau \int_0^{+\infty} g(v)e^{-pv}dv \\
&= \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

3.3 Applications

3.3.1 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$, est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, \quad si \quad \text{t<0}\,; \\ \\ 1, \quad si \quad \text{t>0}. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma(t)) &= \int_0^{+\infty} \Gamma(t)e^{-pt}dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt \\
&= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}.
\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Finalement ;

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}.$$

3.3.2 Transformée de Laplace de la fonction *sinus*

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$