en posant le changement de variable $v = t - \tau$ (donc : $dv = dt$), et en séparant les variables des deux intégrales, nous aurons,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(\tau) g(v) e^{-p(v+\tau)} d\tau dv \\
&= \int_0^{+\infty} f(\tau) e^{-p\tau} d\tau \int_0^{+\infty} g(v) e^{-pv} dv \\
&= \mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)).
\end{aligned}$$

■

3.3 Applications

3.3.1 Transformée de Laplace de l'échelon unitaire

La fonction échelon unitaire, aussi connue sous le nom de fonction de Heaviside et notée $\Gamma(t)$, est définie par :

$$\Gamma(t) = \begin{cases} 0, & si \quad \text{t<0}\,; \\ 1, & si \quad \text{t>0}. \end{cases}$$

La transformée de Laplace de l'échelon unitaire est donc donnée par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\Gamma(t)) &= \int_0^{+\infty} \Gamma(t) e^{-pt} dt \\
&= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt \\
&= \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{+\infty}.
\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t \to \infty$ de e^{-pt} est nulle. Finalement ;

$$\mathcal{L}(\Gamma(t)) = \frac{1}{p}.$$

3.3.2 Transformée de Laplace de la fonction *sinus*

La fonction *sinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\sin(\omega t) = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Donc la transformée de Laplace du *sinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{1}{2i}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t-pt} - e^{-i\omega t-pt}dt\\ &= \frac{1}{2i}\Big[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega-p} + \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega+p}\Big]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t\to\infty$ de e^{-pt} est nulle. Il vient donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\sin(\omega t)) &= \frac{-1}{2i}\Big[\frac{1}{i\omega-p} + \frac{1}{i\omega+p}\Big]\\ &= \frac{\omega}{\omega^2+p^2}.\end{aligned}$$

3.3.3 Transformée de Laplace de la fonction *cosinus*

Comme pour la fonction *sinus*, la fonction *cosinus* peut s'écrire sous la forme d'une somme d'exponentielles complexes :

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2}.$$

Donc la transformée de Laplace du *cosinus* se calcule comme suit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{i\omega t-pt} + e^{-i\omega t-pt}dt\\ &= \frac{1}{2}\Big[\frac{e^{i\omega t-pt}}{i\omega-p} - \frac{e^{-i\omega t-pt}}{i\omega+p}\Big]_0^{+\infty}.\end{aligned}$$

La partie réelle de p étant positive, la limite en $t\to\infty$ de e^{-pt} est nulle. On obtient donc,

$$\mathcal{L}(\cos(\omega t)) = \frac{1}{2}\Big[-\frac{1}{i\omega-p} + \frac{1}{i\omega+p}\Big] = \frac{p}{\omega^2+p^2}.$$

On peut également obtenir ce résultat en remarquant que la dérivation de la fonction sinus donne :

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t).$$

En utilisant la linéarité et la propriété de la transformée de Laplace d'une fonction dérivée, il s'ensuit alors,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos(\omega t)) &= \frac{1}{\omega}(p\mathcal{L}(\sin(\omega t)) - \sin(0))\\ &= \frac{p}{\omega}\frac{\omega}{\omega^2+p^2} = \frac{p}{\omega^2+p^2}.\end{aligned}$$

On retrouve donc bien le résultat établi plus haut.

3.3.4 Transformée de Laplace de l'exponentielle

La transformée de Laplace de la fonction $f(t) = e^{-at}$ se calcule directement par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(e^{-at}) &= \int_0^{+\infty} e^{-at} e^{-pt} dt \\ &= \left[-\frac{e^{-(a+p)t}}{a+p} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{p+a}. \end{aligned}$$

3.3.5 Résolution d'équation différentielles avec la transformée de Laplace

Exemple 3.3.1 *On cherche la solution $x(t)$ de l'équation différentielle :*

$$x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 2e^{-2t}, \tag{3.1}$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$x(0) = 0 \quad et \quad x'(0) = 1. \tag{3.2}$$

Prenons la transformée de Laplace de chaque membre de l'égalité. Le terme forcé est une exponentielle, dont on a déjà calculé la transformée de Laplace. Donc la transformée du membre de droite est :

$$\mathcal{L}(2e^{-2t}) = \frac{2}{p+2}.$$

Notons $X(p)$ la transformée de Laplace de la fonction $x(t)$. Par linéarité, la transformée de Laplace du premier membre est :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x''(t) + 4x'(t) + 3x(t)) &= \mathcal{L}(x''(t)) + 4\mathcal{L}(x'(t)) + 3\mathcal{L}(x(t)) \\ &= p\mathcal{L}(x'(t)) - x'(0) + 4(p\mathcal{L}(x(t)) - x(0)) + 3\mathcal{L}(x(t)) \\ &= p^2 X(p) - px(0) - x'(0) + 4pX(p) - 4x(0) + 3X(p) \\ &= (p^2 + 4p + 3)X(p) - 1. \end{aligned}$$

En remarquant que $p^2 + 4p + 3 = (p+1)(p+3)$, on obtient l'équation suivante, donnant l'expression de $X(p)$ en fonction de p :

$$(p^2 + 4p + 3)X(p) - 1 = \frac{2}{p+2}$$

$$\Leftrightarrow X(p) = \frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)} + \frac{1}{(p+1)(p+3)}.$$

Une décomposition en éléments simples de chaque fraction rationnelle en p donne :

$$\begin{aligned}\frac{2}{(p+2)(p+1)(p+3)} &= -\frac{2}{p+2}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+3}\\ \frac{1}{(p+1)(p+3)} &= \frac{\frac{1}{2}}{p+1}-\frac{\frac{1}{2}}{p+3}.\end{aligned}$$

Autrement dit, il vient :

$$X(p) = -\frac{2}{p+2}+\frac{\frac{3}{2}}{p+1}+\frac{\frac{1}{2}}{p+3}.$$

Reste à déterminer la transformée inverse de cette expression, par linéarité on sait que :

$$x(t) = -2\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+2}\Big)+\frac{3}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+1}\Big)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\Big(\frac{1}{p+3}\Big).$$

On a déjà établi que la transformée de Laplace de e^{-at} est $1/(p+a)$, la solution est finalement donnée par,

$$x(t) = -2e^{-2t}+\frac{3}{2}e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-3t}.$$

On vérifie aisément que la solution trouvée satisfait les conditions initiales (3.2), et est solution de l'équation différentielle (3.1).

Etapes de la résolution d'équations différentielles avec la transformée de Laplace

Cet exemple montre comment résoudre un problème différentiel au moyen de la transformée de Laplace. Cette méthode comporte trois étapes :

- Dans un premier temps on applique la transformée de Laplace au problème posé. Une équation différentielle linéaire à coefficients constants devient alors une simple équation polynomiale en p. Les conditions initiales se traduisent aussi par des termes en puissance de p, sans compliquer notablement la forme de l'équation. Le terme forcé fait apparaître un second membre en p.
- Dans un second temps on résout le problème en p, autrement dit on détermine $X(p)$ qui est la transformée de Laplace de la solution.
- Enfin, il suffit d'effectuer la transformée inverse (ou de consulter des tables) pour obtenir la fonction $x(t)$ solution du problème différentiel.

Malgré la succession des étapes il est souvent moins complexe de résoudre ainsi les équations différentielles linéaires, surtout pour un ordre élevé.