Université Ferhat ABBAS Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A. Khalouta

03/2025

TD 02: Transformation de Fourier

N.B. On a $\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}(f(x))(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\omega x}dx$

Exercice 1: Soient la fonction porte $\Pi(x)$ et la fonction de triangle $\Delta(x)$, telles que

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{si } |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{et } \Delta(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases}$$

(1) Représenter graphiquement $\Pi(x)$ et $\Delta(x)$.

(2) Calculer la transformée de Fourier de $\Pi(x)$ et $\Delta(x)$.

(3) En déduire la transformée de Fourier des fonctions suivantes:

a) $\Pi\left(\frac{x+1}{2}\right)$, b) $(x+1)\,\Pi(x)$, c) $\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$, d) $\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2$.

(4) Utiliser l'identité de Parseval pour en déduire les intégrales $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^n dx$, pour $n = 2, 4$.

Exercice 2: Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(1) En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe aucun élément $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{R})$

$$g * f = f.$$

(2) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution

$$f * f = f.$$

Exercice 3: Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\pi x^2}$

(1) Vérifier que f est la solution de l'équation différentielle

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0. \qquad (1)$$

(2) En appliquant la transformée de Fourier a (1), montrer que $\widehat{f}(\omega)$ est une solution d'une équation différentielle $\widehat{(1)}$ du premier ordre qu'on déterminera.

(3) Résoudre $\widehat{(1)}$ et déterminer $\widehat{f}(\omega)$, sachant que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2}dx = 1$.

Exercice 4: Soit la fonction $f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$.

(1) Calculer sa transformée de Fourier.

(2) En déduire la transformée de Fourier de $g : x \to \frac{1}{1+x^2}$.

(3) Calculer le produit de convolution $f \star f$ et en déduire la transforme de Fourier de $x \to \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

(4) Déterminer la transformée de Fourier de $x \to \frac{x}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 5: Soit l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2} \qquad \text{pour } \ 0 < a < b$$

avec f absolument intégrable et bornée.

Déterminer la transformée de Fourier de f puis en déduire f.

Exercice 6: Soit $a \in]0, +\infty[$. On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = e^{-ax} \chi_{]0,+\infty[}(x) \quad \text{et} \quad \varphi_k(x) = \frac{x^k}{k!} f_a(x)$$

(1) Calculer $\mathcal{F}(f_a(x))(\omega)$ et en déduire $\mathcal{F}(\varphi_k(x))(\omega)$.

(2) Soit la fonction g_a définie par

$$g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x).$$

Déterminer $\mathcal{F}(g_a(x))(\omega)$ et en déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2} dx$, où $\xi \in \mathbb{R}$.

(1)

Corrigé type Serie N°2

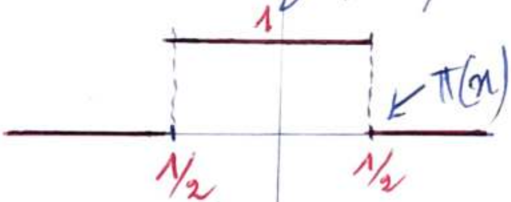
Exercice N°1:

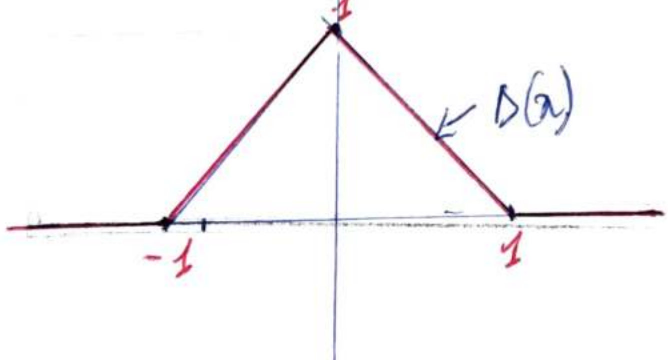
Soient la fonction porte et la fonction triangle $\Pi(x)$, $\Delta(x)$ définie par:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & si\ |x| \leq \frac{1}{2} \\ 0 & si\ |x| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad et$$

$$\Delta(x) = \begin{cases} 1-|x| & si\ |x| < 1 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

1) Représenter graphiquement





$$\Delta(x) = \begin{cases} 1-x & si\ 0 \leq x < 1 \\ 1+x & si\ -1 < x < 0 \\ 0 & si\ |x| \geq 1 \end{cases}$$

2) On calcule la transformée de Fourier de $\Pi(x)$ et $\Delta(x)$

$$\hat{\Pi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(x)\, e^{-2\pi i w x}\, dx$$

$$= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i w x}\, dx = \frac{-1}{2\pi i w} \left[e^{-2\pi i w x} \right]_{-1/2}^{1/2}$$

$$= -\frac{1}{2\pi i w} \left[e^{-\pi i w} - e^{2\pi i w} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi w} \left[\frac{e^{2\pi i w} - e^{-\pi i w}}{2i} \right]$$

$$= \frac{\sin(\pi w)}{\pi w} \quad avec\ w \neq 0$$

Pour $w = 0$ on a $\hat{\Pi}(0) = 1$

Puisque $\Delta(x)$ est paire, alors

$$\hat{\Delta}(w) = 2\int_0^{+\infty} \Delta(x) \cos(2\pi w x)\, dx$$

$$= 2\int_0^1 \underbrace{(1-x)}_{u} \underbrace{\cos(2\pi w x)\, dx}_{dv}$$

l'intégration par partie donne

$$= \left[\frac{2(1-x)\sin 2\pi w x}{2\pi w} \right]_0^1 \rightarrow 0$$

$$+ \frac{2}{2\pi w} \int_0^1 \sin(2\pi w x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\pi w} \left[-\frac{1}{2\pi w} \left(\cos 2\pi w x \right) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\pi^2 w^2} \left(\frac{1 - \cos 2\pi w}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{\pi^2 w^2} \cdot \sin^2 \pi w = \left(\frac{\sin(\pi w)}{\pi w} \right)^2$$

Pour $w = 0$ on a $\hat{\Delta}(0) = 1$

② on deduit la T.F de

a) $\Pi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \Pi\left(\frac{1}{2}(x-(-1))\right)$

donc : $\mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2}(x-(-1))\right)$

$= \mathcal{F}\left(h_{1/2}(\tau_{-1}\Pi)(x)\right)(w)$

$= 2\,(\widehat{\tau_{-1}\Pi})(2w)$

$= 2\, e^{-2\pi i(2w)(-1)}\,\hat{\Pi}(2w)$

$= \cancel{2}\, e^{4\pi i w}\,\frac{\sin(2\pi w)}{\cancel{2}\pi w}$

$= e^{4\pi i w}\,\frac{\sin(2\pi w)}{\pi w}$

b) $\mathcal{F}\left((x+1)\Pi(x)\right) = \mathcal{F}\left(x\Pi(x) + \Pi(x)\right)$

$= \mathcal{F}(x\Pi(x)) + \mathcal{F}(\Pi(x))$

$= \frac{-1}{2\pi i}\frac{d}{dw}\hat{\Pi}(w) + \hat{\Pi}(w)$

$= -\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dw}\frac{\sin(\pi w)}{\pi w} + \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$

$= \frac{\sin(\pi w)}{2 i \pi^2 w^2} - \frac{\cos(\pi w)}{2 i \pi w} + \frac{\sin(\pi w)}{\pi w}$

c) on a la propriété

$\mathcal{F}(\mathcal{F}(\Pi(x))(w) = \hat{\hat{\Pi}}(w)$

$= \Pi(-x)$

donc $\mathcal{F}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right) = \Pi(x)$

car $\Pi(x)$ est une fonction paire

d) $\mathcal{F}(\mathcal{F}(\Delta(x)))(w) = \hat{\hat{\Delta}}(w)$

$= \Delta(-x)$

donc $\mathcal{F}\left(\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right) = \Delta(x)$

car Δ est une fonction pair

4) on utilise l'identité de Parseval on a

$n=2$ $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2 dx = \int_{\mathbb{R}}(\Pi(w))^2 dw$

$= \int_{-1/2}^{1/2} 1\, dw = w\Big]_{-1/2}^{1/2} = 1$

$n=4$ $\int_{\mathbb{R}}\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^4 dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right)^2\right)^2$

$= \int_{\mathbb{R}}(\Delta(w))^2 dw = \int_{-1}^{0}(1+w)^2 dw$

$+ \int_0^1 (1-w)^2 dw$

$= \int_{-1}^{0}(1+2w+w^2)\,dw$

$+ \int_0^1 (1-2w+w^2)\,dw =$

$\left[w + \frac{2w^2}{2} + \frac{w^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[w - \frac{2w^2}{2} + \frac{w^3}{3}\right]_0^1$

$= \left[-1 + \frac{2(-1)^2}{2} + \frac{1}{3}\right] + \left[1 - \frac{2\cdot 1^2}{2} + \frac{1}{3}\right]$

$= 2/3$

③ **Exercice N° 2**

1) On utilise la T.F, on montre qu'il n'existe aucun $g \in L^1(\mathbb{R})$ telque $\forall f \in L^1(\mathbb{R})$

$$g * f = f$$

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que $g * f = g$. On applique la T.F, on obtient

$$F(g * f)(w) = F(f)(w)$$

$$\Rightarrow \hat{g}(w) \cdot \hat{f}(w) = \hat{f}(w)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w)[\hat{g}(w) - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(w) = 0 \\ \check{g}(w) = 1 \rightarrow \text{Contraduction} \end{cases}$$

car si $g \in L^1(\mathbb{R})$, $\lim_{w \to \pm\infty} \hat{g}(w) = 0$

donc $\nexists\, g \in L^1(\mathbb{R})$ de sorte que

$$g * f = f$$

2) On résoud dans $L^1(\mathbb{R})$ l'equation convolution $f * f = f$

En appliquant la T.F, on trouve

$$F(f * f)(w) = F(f)(w)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w)\hat{f}(w) = \hat{f}(w)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(w)[\hat{f}(w) - 1] = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{f}(w) = 0 \\ \hat{f}(w) = 1 \text{ « Impossible »} \end{cases}$$

car $\lim_{w \to \pm\infty} \hat{f}(w) = 0$, donc

$$\hat{f}(w) = 0 \Rightarrow f = 0 \text{ pp sur } \mathbb{R}$$

Exercice N° 3

Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) On vérifie que $f(x)$ est la solution de l'équation différentielle :

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$$

pour cela on a

$$f'(x) + 2\pi x f(x) = \left(e^{-\pi x^2}\right)' + 2\pi x\, e^{-\pi x^2}$$

$$= -2\pi x\, e^{-\pi x^2} + 2\pi x\, e^{-\pi x^2} = 0$$

2) On applique la T.F sur l'equation (1) on a

$$F\left(f'(x) + 2\pi x f(x)\right) = 0$$

$$\Rightarrow F(f'(x))(w) + 2\pi F(x f(x))(w) = 0$$

$$\Rightarrow (2\pi i w)\hat{f}(w) + 2\pi\left(-\frac{1}{2\pi i}\frac{d}{dw}\hat{f}(w)\right) = 0$$

$$\Rightarrow (2\pi i w)\hat{f}(w) - \frac{1}{i}\frac{d}{dw}\hat{f}(w) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dw}\hat{f}(w) + 2\pi w \hat{f}(w) = 0 \qquad (\hat{1})$$

3) On resoud l'equation $(\hat{1})$

on a $\frac{d}{dw}\hat{f}(w) + 2\pi w \hat{f}(w) = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dw}\hat{f}(w) = -2\pi w \hat{f}(w)$$

(4) $\Rightarrow \dfrac{d\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = -2\pi\omega\, d\omega$

$\Rightarrow \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{d\hat{f}(\omega)}{\hat{f}(\omega)} = \int -2\pi\omega\, d\omega$

$\Rightarrow \ln|\hat{f}(\omega)| = -\pi\omega^2 + C$

$\Rightarrow \hat{f}(\omega) = K e^{-\pi\omega^2} \;/ K \in \mathbb{R}$

on a $\hat{f}(0) = K$ et

$\hat{f}(0) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i\omega(0)} f(x)\,dx$

$= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$

$\Rightarrow K = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} = 1$

donc $\hat{f}(\omega) = e^{-\pi\omega^2}$

Excercice N° 4

Soit la fonction

$f(x) = e^{-a|x|}$ pour $a > 0$

1) on calcule la Transformée de Fourier de $f(x)$

on a $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{si } x > 0 \\ e^{ax} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

donc $\hat{f}(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi i\omega x}\, dx$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-2\pi i\omega x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i x\omega}\, dx$

$= \displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{(a-2\pi i\omega)x}\, dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-(a+2\pi i\omega)x}\, dx$

$= \dfrac{1}{a-2\pi i\omega}\Big[e^{(a-2\pi i\omega)x}\Big]_{-\infty}^{0} - \dfrac{1}{a+2\pi i\omega}\Big[e^{-(a+2\pi i\omega)x}\Big]_{0}^{+\infty}$

$= \dfrac{1}{a-2\pi i\omega} + \dfrac{1}{a+2\pi i\omega}$

$= \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\omega^2}$

d'où $\hat{f}(\omega) = \dfrac{2a}{a^2+4\pi^2\omega^2}$

2) Pour $a = 2\pi$ on a

$\hat{f}(\omega) = \dfrac{4\pi}{4\pi^2+4\pi^2\omega^2}$

$= \dfrac{1}{\pi}\,\dfrac{1}{1+\omega^2}$

donc sa transformée de Fourier est $f(-x) = e^{-2\pi|x|}$

Ainsi la transformée de Fourir de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est $\omega \longmapsto \pi e^{-2\pi|\omega|}$

3) on calcule le produit de convolution

⑤ $(f*f)(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)\,dy$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|x-y|} \cdot e^{-a|y|}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(|x-y|+|y|)}\,dy$$

$$=\int_{-\infty}^{0} e^{-a(|x-y|-y)}\,dy+\int_{0}^{+\infty} e^{-a(|x-y|+y)}\,dy$$

Si $x>0$ on a

$$(f*f)(x)=\int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-2y)}\,dy+\int_0^x e^{-ax}\,dy+\int_x^{+\infty} e^{-a(2y-x)}\,dy$$

Car $|x-y|=\begin{cases} x-y & \text{si } y<x \\ -(x-y) & \text{si } y>x \end{cases}$

$$=\frac{1}{2a}e^{-a(x-2y)}\Big]_{-\infty}^{0}+y\,e^{-ax}\Big]_0^x-\frac{1}{2a}e^{-a(2y-x)}\Big]_x^{+\infty}$$

$$=\frac{e^{-ax}}{2a}+x\,e^{-ax}+\frac{e^{-ax}}{2a}.$$

$$=e^{-ax}\left(x+\frac{1}{a}\right),\ a>0$$

la fonction f est paire il en est même de $f*f$

en effet $(f*f)(-x)$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f(-(x-y))f(-y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)f(y)\,dy=(f*f)(x)$$

on en deduire que

$$(f*f)(x)=e^{-a|x|}\left(|x|+\frac{1}{a}\right)$$

La T.F de $f*f$ est

$$\widehat{(f*f)}(w)=\hat{f}(w)\cdot\hat{f}(w)=\left(\hat{f}(w)\right)^2$$

$$=\frac{4a^2}{(a^2+4\pi^2w^2)^2}$$

donc pour $p=2\pi$ on a

$$\widehat{(f*f)}(w)=\frac{16\pi^2}{(4\pi^2+4\pi^2w^2)^2}$$

$$=\frac{16\pi^2}{16\pi^4(1+w^2)^2}$$

$$=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{1}{(1+w^2)^2}\right)$$

on applique la transformée de Fourier inverse. on obtient la transformée de Fourier de $x\longrightarrow\frac{1}{(1+x^2)^2}$

est la fonction $w\longmapsto (f*f)(w)=\pi^2 e^{-2\pi|w|}\left(|w|+\frac{1}{2\pi}\right)$

(6) 4) on détermine la T.F de $x \longmapsto \frac{x}{(1+x^2)^2}$

Remarquons que la dérivée de $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est $x \longmapsto \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$

donc $\mathcal{F}\left(\frac{x}{(1+x^2)^2}\right)(w) = -\frac{1}{2} \mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right)(w)$

$= -\frac{1}{2} (2\pi i w) \mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)(w)$

$= -\frac{1}{2} (2\pi i w) . \pi e^{-2\pi |w|}$

$= -\pi^2 i w \, e^{-2\pi |w|}$.

Exercice N° 5

Soit l'équation pour $0 < a < b$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{(x-t)^2+a^2} dt = \frac{1}{x^2+b^2} \quad \cdots (*)$$

on exprime (*) sous forme d'une équation de convolution

Posons $g_c(t) = \frac{1}{t^2+c^2}$ donc on a $c>0$

$(f * g_a)(t) = g_b(t)$

en effet

$(f * g_a)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) g_a(x-t) dt$

$= \int_{\mathbb{R}} f(t) . \frac{1}{(x-t)^2+a^2} dt$

$= \frac{1}{x^2+b^2} = g_b(x)$

on détermine la T.F de f puis on déduit f.

pour cela on a

$f * g_a = g_b \Rightarrow \widehat{f * g_a} = \widehat{g_b}$

$\Rightarrow \hat{f} \cdot \hat{g}_a = \hat{g}_b$

$\Rightarrow \hat{f} = \frac{\hat{g}_b}{\hat{g}_a}$

on calcule $\hat{g}_a$ et $\hat{g}_b$

on a $g_c(t) = \frac{1}{c^2+t^2}$

$= \frac{1}{c^2\left(1+\left(\frac{t}{c}\right)^2\right)}$

on a $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+t^2}\right) = \pi e^{-2\pi |w|}$ d'après l'exercice (4)

donc $\mathcal{F}\left(\frac{1}{c^2(1+t^2)}\right) = \frac{\pi}{c^2} e^{-2\pi |w|}$

$\hat{g}_c(t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{c^2+t^2}\right)$

$\mathcal{F}\left(\frac{1}{c^2(1+\frac{t}{c})^2}\right) = \frac{\pi}{c} e^{-2\pi c |w|}$

7) donc on a

$$\hat{f} = \frac{\hat{g}_b}{\hat{g}_a} = \frac{\frac{\pi}{b} e^{-2\pi b|w|}}{\frac{\pi}{a} e^{-2\pi a|w|}}$$

$$= \frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|w|}$$

on applique la transformée de Fourier inverse on a.

$$F(f(t)) = \frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|w|}$$

$$\Rightarrow f(t) = F^{-1}\left(\frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|w|}\right)$$

$$= \frac{a}{b} \frac{(b-a)}{\pi} F^{-1}\left(\frac{\pi}{b-a} e^{-2\pi(b-a)|w|}\right)$$

$$= \frac{a}{b} \frac{(b-a)}{\pi} \frac{1}{[(b-a)^2 + t^2]}$$

$$\Rightarrow f(t) = \frac{a(b-a)}{b\pi[t^2 + (b-a)^2]}$$

Excercice N°6

Soit $a \in]0, +\infty[$, on considère $f_a(x) = e^{-ax} \chi_{]0,+\infty[}(x)$, $e_k(x) = \frac{x^k}{k!} f_a(x)$

1) on calcule $F(f_a(x))(w)$ et on déduit $F(e_k(x))(p)$

on a

$$f_a(x) = e^{-ax} \chi_{]0,+\infty[}(x) = \begin{cases} e^{-ax} & si\ x \in]0,+\infty[\\ 0 & si\ x \notin]0,+\infty[\end{cases}$$

donc on a $F(f_a(x))(w) =$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-ax} e^{-2\pi i w x} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-(a+2\pi i w)x} dx$$

$$= \frac{-1}{a+2\pi i w} \left[e^{-(a+2\pi i w)x} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{a+2\pi i w}$$

d'où $\hat{f_a}(w) = \frac{1}{a+2\pi i w}$

on déduire $F(e_k(x))(w)$

on a : $\frac{d^{(k)}}{dw^k} \hat{f_a}(w)$

$$= F((-2\pi i x)^k f_a(x))(w)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k!} \frac{d^{(k)}}{dw^k} \hat{f_a}(w) =$$

$$= (-2\pi i)^k F\left(\frac{x^k}{k!} \hat{f_a}(w)\right)$$

$$\Rightarrow F\left(\frac{x^k}{k!} \hat{f_a}(w)\right) = F(e_k(x))(w)$$

$$= \frac{1}{(-2\pi i)^k k!} \frac{d^{(k)}}{dw^k} \hat{f_a}(w)$$

on utilisant la dérivée successive on obtient

$$\frac{d^{(1)}}{dw} \hat{f_a}(w) = \frac{-2\pi i}{(a+2\pi i w)^2}$$

$$= \frac{(-2\pi i)^1 1!}{(a+2\pi i w)^2}$$

⑧ $\frac{d^{(2)}}{dw^2}\hat{f_a}(w) = \frac{(-2\pi i)^2 2!}{(a+2\pi i w)^3}$

$\frac{d^{(3)}}{dw^3}\hat{f_a}(w) = \frac{(-2\pi i)^3 3!}{(a+2\pi i w)^4}$

$\vdots$

on peut généralisé jusqu'à l'ordre k.

$$\frac{d^{(k)}}{dw^k}\hat{f_a}(w) = \frac{(-2\pi i)^k k!}{(a+2\pi i w)^{k+1}}$$

donc $\mathcal{F}(\ell_k(x))(w)$

$$= \frac{1}{(-2\pi i)^k k!} \times \frac{(-2\pi i)^k k!}{(a+2\pi i w)^{k+1}}$$

$$= \frac{1}{(a+2\pi i w)^{k+1}}$$

2) Soit la fonction

$g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$

On détermine $\mathcal{F}(g_a(x))(w)$

et on déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\xi x)}{1+x^2}dx$

ou $\xi \in \mathbb{R}$

on a $\mathcal{F}(g_a(x))(w)$

$= \mathcal{L}(f_a(x) + f_a(-x))$

$= \hat{f}(w) + \hat{f}(-w)$

$$= \frac{1}{a+2\pi i w} + \frac{1}{a-2\pi i w} = \frac{2a}{a^2+4\pi^2 w^2}$$

Pour déduire la valeur de l'intégrale on utilise la transformée de Laplace inverse, alors on a

$g_a(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{g}_a(w))$

$= \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i w x}\hat{g}_a(w)\,dw$

$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} (\cos(2\pi w x) + i\sin(2\pi w x)) \times \hat{g}_a(w)\,dw = g_a(x) = e^{-a|x|}$

car $g_a(x) = f_a(x) + f_a(-x)$

$$= \begin{cases} e^{-ax} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} + \begin{cases} e^{ax} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$= e^{-a|x|}$$

$\Rightarrow 2\int_0^{+\infty} \cos(2\pi w x)\hat{g}_a(w)\,dw = e^{-a|x|}$

Car la fonction $\cos(2\pi w x)\hat{g}_a(w)$ est paire et $\sin(2\pi w x)\hat{g}_a(w)$ est impaire alors

$$\Rightarrow 4a\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2\pi w x)}{a^2+4\pi^2 w^2}dw = e^{-a|x|}$$

(9) Choisissons

$a = 2\pi$ et $f = 2\pi x$

on obtient :

$$\Rightarrow 8\pi \int_0^{+\infty} \frac{\cos(f w)}{4\pi^2 + 4\pi^2 w^2} dw$$

$$= e^{-2\pi|x|} = e^{-|f|}$$

$$\Rightarrow \frac{8\pi}{4\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos(f w)}{1 + w^2} dw$$

$$= e^{-|f|}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{\cos(f w)}{1+w^2} dw$$

$$= \pi/2 \; e^{-|f|}$$

on pose : $x = w$

on obtient :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(f x)}{1+x^2} dx$$

$$= \pi/2 \; e^{-|f|}$$

avec $f \in \mathbb{R}$

fin