Université Ferhat ABBAS Sétif 1
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
A. Khalouta

04/2025

TD 03: Transformation de Laplace

Exercice 1: Soit la fonction de Heaviside définie par

$$H(t) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad t \geq 0, \\ 0, & \text{si} \quad t < 0. \end{cases}$$

Tracer le graphe et calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

1. $H(t-1) - H(t-2)$.
2. $(t-2)^2 H(t-2)$.
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (H(t-2n) - H(t-(2n+1)))$.

Exercice 2: Soit $a \in \mathbb{R}_+$

1) Par deux méthodes differentes, calculer la transformation de Laplace de

$$f(t) = te^{at}.$$

2) Soit

$$\begin{array}{cccc} f_k & : & \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ t & \longrightarrow & f_k = \dfrac{t^k}{k!} e^{at}. \end{array}$$

Montrer par recurrence que

$$\mathcal{L}(f_k(t))(p) = \frac{1}{(p-a)^{k+1}}.$$

Exercice 3: On pose

$$f(t) = (1 - \cos t) \text{ et } g(t) = e^{-t} f(t).$$

1) Montrer que

$$\mathcal{L}(f(t))(p) = \frac{1}{p(p^2+1)}.$$

2) En déduire que

$$\mathcal{L}(e^t g''(t))(p) = \frac{(p-1)^2}{p(p^2+1)}.$$

Exercice 4: Soit $a \in \mathbb{R}_+$

Résoudre en utilisant la transformation de Laplace, les équations intégrales suivantes:

$$x(t) = t + \int_0^t x(s)\sin(t-s)ds, t \geq 0.$$

$$e^{-t}x(t) - \int_0^t e^{-s}x(s)ds = \sin t, t \geq 0.$$

Exercice 5: Déterminer les originaux des fonctions suivantes:

$$F(P) = \frac{1}{p^2 - 3p + 2}\ ,\ G(P) = \frac{p+1}{p(p^2+4)}\ ,\ K(P) = \frac{5}{(p+1)(p^2+4p+8)}.$$

.

Exercice 6: Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante:

$$y''(t) - y(t) = 3e^{-2t} + t + 1, \tag{1}$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = y'(0) = 0. \tag{2}$$

(1) **Corrigé type Serie N° 3**

Exercice N° 1

Soit la fonction de Heaviside définie par

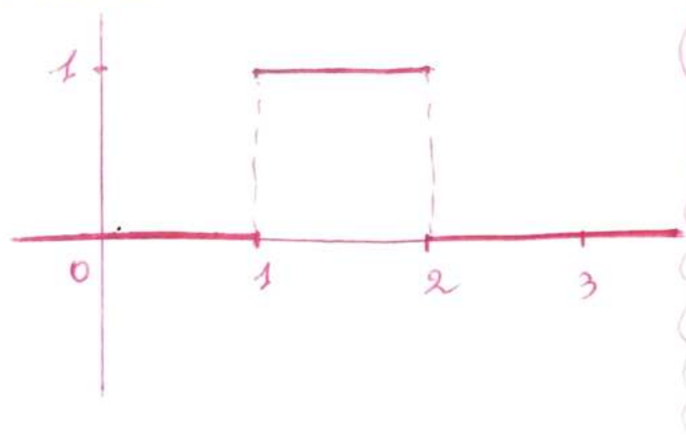
$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

1) Tracer les graphes et calculer la transformée de Laplace de

- $H(t-1) - H(t-2)$

On distingue 3 cas

- Si $t < 1$ alors $H(t-1) = 0$ et $H(t-2) = 0$, et la fonction est nulle
- Si $t \in [1, 2]$, alors $H(t-1) = 1$ et $H(t-2) = 0$ et la fonction vaut 1
- Si $t > 2$ alors $H(t-1) = 1$ et $H(t-2) = 1$, et la fonction est nulle.



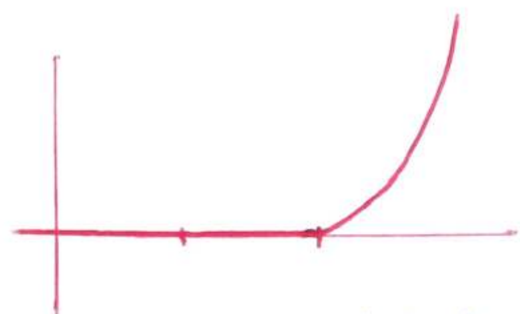
Par conséquent

$$F(P) = \int_1^2 e^{-Pt} = \frac{-1}{P} e^{-Pt}\Big]_1^2$$

$$= -\frac{1}{P} e^{-2t} + \frac{1}{P} e^{-t} = \frac{1}{P}\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

- $(t-2)^2 H(t-2)$

La fonction est simplement la fonction $t \mapsto t^2$, mais translate par 2, on obtient donc la courb



On sait que $\mathcal{L}(t^2) = \frac{2}{P^3}$

En utilisant la propriété de translation, on obtient

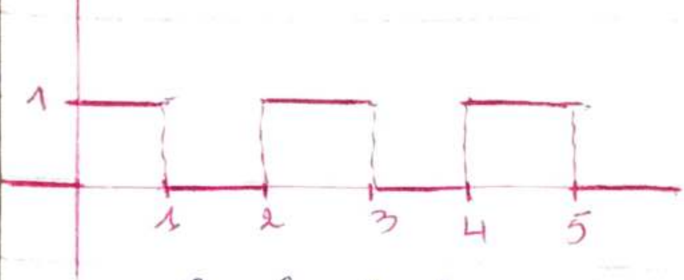
$$\mathcal{L}\left((t-2)H(t-2)\right) = e^{-2P} \cdot F(P)$$

$$= \frac{2e^{-2P}}{P^3}.$$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \left(H(t-2n) - H(t-(2n+1))\right)$

Avec le même raisonnement qu'à la première fonction

② on constate que la fonction vaut 1 sur l'intervalles de type $[2n, 2n+1]$ et vaut 0 ailleurs



Le calcule de transformée de Laplace donne alors

$$F(P) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{2n}^{(2n+1)} e^{-Pt}\,dt$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{-1}{P} e^{-Pt} \right]_{2n}^{(2n+1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{P} e^{-(2n+1)P} + \frac{1}{P} e^{-2nP} \right)$$

$$= \frac{1}{P} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nP} - \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-(2n+1)P} \right)$$

$$= \frac{1}{P} \left(\frac{1}{1-e^{-2P}} - \frac{e^{-P}}{1-e^{-2P}} \right)$$

$$= \frac{1}{P(1-e^{-2P})} \left(1 - e^{-P}\right).$$

Exercice N° 2

Par deux méthodes differentes On calcule la T.L de

$f(t) = t e^{at}$ avec $a > 0$

1ère Méthode : on a

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-Pt}\,dt$$

$$= \int_0^{+\infty} t e^{at} e^{-Pt}\,dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(P-a)t}\,dt$$

on intègre par partie on a

$u = t \longrightarrow du = 1$

$dv = e^{-(P-a)t} \longrightarrow v = \frac{-1}{(P-a)} e^{-(P-a)t}$

donc

$$\mathcal{L}(f(t)) = \left[\frac{-t}{P-a} e^{-(P-a)t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{P-a} e^{-(P-a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{P-a} \left[\frac{-1}{P-a} e^{-(P-a)t} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{(P-a)^2}.$$

2ème Methode

Soit $g(t) = t \Rightarrow G(P) = \frac{1}{P^2}$

donc $\mathcal{L}(t e^{at}) = \mathcal{L}(e^{at} g(t))$

$$= G(P-a) = \frac{1}{(P-a)^2}.$$

2) Soit $f_k : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto f_k(t) = \frac{t^k}{k!} e^{at}$

on montre par recurrence que

$$\mathcal{L}(f_k(t)) = \frac{1}{(P-a)^{k+1}} \quad (*)$$

(3) Pour $k=0$ on a

$f_0(t)=e^{at} \rightarrow \mathcal{L}(f_0(t))=\frac{1}{p-a}$

pour $k=1$ on a

$f_1(t)=t\,e^{at} \rightarrow \mathcal{L}(f_1(t))=\frac{1}{(p-a)^2}$

donc (*) est vraie pour $k=0$ et $k=1$. Supposons que (*) est vraie pour k et on montre qu'elle vraie pour $k+1$. Donc

$f_{k+1}(t)=\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}e^{at} \Rightarrow$

$\mathcal{L}(f_{k+1}(t))=\frac{1}{(k+1)!}\int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{at}e^{-pt}dt$

$=\frac{1}{(k+1)!}\int_0^{+\infty}\underbrace{t^{k+1}}_{u}\,\underbrace{e^{-(p-a)t}}_{dv}\,dt$

I.P.P $=\frac{1}{(k+1)!}\left[\frac{-t^{k+1}}{p-a}e^{-(p-a)t}\right]_0^{+\infty}$

$+\frac{1}{p-a}\int_0^{+\infty}(k+1)t^k e^{-(p-a)t}dt$

$=\frac{1}{(k+1)!}(k+1)\cdot\frac{1}{p-a}\int_0^{+\infty}t^k e^{-(p-a)t}dt$

$=\frac{1}{p-a}\int_0^{+\infty}\frac{t^k}{k!}e^{-(p-a)t}dt$

$=\frac{1}{p-a}\cdot\frac{1}{(p-a)^k}=\frac{1}{(p-a)^{k+1}}$

Exercice N°3

Soit $f(t)=1-\cos t$

et $g(t)=e^{-t}f(t)$

1) on montre que

$\mathcal{L}(f(t))(p)=\frac{1}{p(p^2+1)}$

On a $\mathcal{L}(f(t))(p)=$

$=\mathcal{L}(1-\cos t)=\mathcal{L}(1)-\mathcal{L}(\cos t)$

$=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}=\frac{\cancel{p^2}+1-\cancel{p^2}}{p(p^2+1)}$

$=\frac{1}{p(p^2+1)}$

2) on deduire que:

$\mathcal{L}(e^t g''(t))=\frac{(p-1)^2}{p(p^2+1)}$

on a $\mathcal{L}(g''(t))=p^2\mathcal{L}(g(t))$

$-p\,g(0^+)-g'(0^+)$.

on a $g(0^+)=1-\cos(0^+)=0$

$g'(t)=\sin t \Rightarrow g'(0)=0$

donc $\mathcal{L}(g''(t))=p^2\mathcal{L}(g(t))$

$=p^2\mathcal{L}(e^{-t}f(t))$

$=p^2F(p+1)=\frac{p^2}{(p+1)((p+1)^2+1)}$

(Propriété de Translation de variable p)

(4) ce qui implique que

$$\mathcal{L}(e^t g''(t)) = \frac{(P-1)^2}{P(P^2+1)}.$$

Excercice N° 4

Resoudre en utilisant la T.L les equations Intégrales

1) $x(t) = t + \int_0^t x(s)\sin(t-s)\,ds$

on applique la T.L sur l'equation 1 on trouve

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}\left(t + \int_0^t x(s)\sin(t-s)ds\right)$$

$$= \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}\left(\int_0^t x(s)\sin(t-s)ds\right)$$

$$= \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(x(t) * \sin(t))$$

$$= \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(x(t)) \cdot \mathcal{L}(\sin(t))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \frac{\mathcal{L}(t)}{1-\mathcal{L}(\sin t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{P^2}}{1-\frac{1}{P^2+1}} = \frac{P^2+1}{P^4} = \frac{1}{P^2} + \frac{1}{P^4}$$

on applique la T.L inverse on trouve:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}(1/P^2) + \mathcal{L}^{-1}(1/P^4)$$

$$= t^2 + \frac{1}{6}t^3.$$

2) $e^{-t}x(t) - \int_0^t e^{-s}x(s)ds = \sin(t)$

Multiplie l'equation (2) par e^t, on trouve

$$x(t) - \int_0^t e^{t-s}x(s)ds = e^t \sin t$$

on applique la T.L, on a

$$\mathcal{L}(x(t)) - \mathcal{L}\left(\int_0^t e^{t-s}x(s)ds\right) = \mathcal{L}(e^t \sin(t))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) - \mathcal{L}(e^t * x(t)) = \mathcal{L}(e^t \sin t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) - \mathcal{L}(e^t) \cdot \mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(e^t \sin t)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(x(t)) = \frac{\mathcal{L}(e^t \sin t)}{1-\mathcal{L}(e^t)}$$

$$= \frac{\frac{1}{(P-1)^2+1}}{1-\frac{1}{P-1}} = \frac{P-1}{(P-2)\left[(P-2)^2+1\right]}$$

on effectue une decomposition en éléments simple on a

$$\frac{P-1}{(P-2)\left[(P-2)^2+1\right]} =$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{P-1} - \frac{1}{2}\frac{P-1}{(P-1)^2+1} + \frac{1}{2}\frac{1}{(P-1)^2+1}$$

on applique la TL inverse on obtient:

(5) $x(t) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-1}\right)$

$-\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(p-1)^2+1}\right)$

$= \frac{1}{2}\left[e^t + e^t \sin t - e^t \cos t\right]$

Excercice N° 5:

on determine les originaux des fonctions suivantes

1) $F(p) = \frac{1}{p^2-3p+2} = \frac{1}{(p-1)(p-2)}$

$= \frac{a}{p-1} + \frac{b}{p-2}$

par un calcule simple on trouve $a=-1$ et $b=1$ donc

$F(p) = \frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}$

donc il vient

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(p)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p-2} - \frac{1}{p-1}\right)$

$= e^{2t} - e^t$

2) $G(p) = \frac{p+1}{p(p^2+4)}$

$= \frac{a}{p} + \frac{bp+c}{p^2+4}$

On élément simple on a

$a = 1/4 \quad b = -1/4 \quad c = 1$

donc on a

$G(p) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{p} + \frac{-p+4}{p^2+4}\right)$

donc il vient que

$g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(p))$

$= \frac{1}{4}\left[\mathcal{L}^{-1}(1/p) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2+4}\right)\right]$

$+ \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{p^2+4}\right)$

$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t.$

3) $K(p) = \frac{5}{(p+1)(p^2+4p+8)}$

$= \frac{a}{p+1} + \frac{bp+c}{p^2+4p+8}$

par un calcule simple on a

$a = 1, \; b = -1$ et $c = -3$

donc, il vient que

$K(p) = \frac{1}{p+1} - \left(\frac{p+3}{p^2+4p+8}\right)$

alors: $k(t) = \mathcal{L}^{-1}(K(p))$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+3}{p^2+4p+8}\right)$

on a $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+3}{p^2+4p+8}\right)$

$= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2+1}{(p+2)^2+4}\right)$

$$⑥ = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p+2}{(p+2)^2+2^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{(p+2)^2+2^2}\right)\right)$$

$$= e^{-2t}\cos 2t + \frac{1}{2}e^{-2t}\sin 2t$$

donc finalement on a

$$K(t) = e^{t} - e^{-2t}\left(\cos 2t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

Exercice N° 6.

on utilisons la T.L, on resoud l'équation differentielle suivant

$$y''(t) - y(t) = 3e^{-2t} + t + 1 \quad \text{--- ①}$$

avec $y(0) = y'(0) = 1$

On applique la T.L sur ① et on utilise la propriété de linéarité on trouve

$$\mathcal{L}(y''(t)) - \mathcal{L}(y(t)) = 3\mathcal{L}(e^{-2t}) + \mathcal{L}(t) + \mathcal{L}(1)$$

on pose : $F(p) = \mathcal{L}(y(t))$

et on utilise la T.L de la derivée second on trouve :

$$p^2F(p) - py'(0) - y(0) - F(p) = 3\cdot\frac{1}{p+2} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}$$

on remplce les condition initiales ② on trouve

$$(p^2-1)F(p) = \frac{4p^2+3p+2}{p^2(p+2)}$$

$$\Rightarrow F(p) = \frac{4p^2+3p+2}{p^2(p+2)(p^2-1)}$$

$$= \frac{a}{p} + \frac{b}{p^2} + \frac{c}{p+2} + \frac{d}{p-1} + \frac{e}{p+1}$$

$$= \frac{-1}{p} - \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p+2} + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p-1}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{p+1}\right)$$

on applique la T.L inverse on trouve la solution de EDO ① avec les conditions initiales ② est

$$y(t) = -1 - t + e^{-2t} + \frac{3}{2}e^{t} - \frac{3}{2}e^{-t}$$

fin