

Correction des séries d'exercices

3.7 Espaces L^p

Exercice 3.7.1 Inégalités de Young et de Hölder

1. Soit $a, b \geq 0$ et soit $p, q \in (1, +\infty)$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. La fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + b^q\frac{1}{q} - ab$ est dérivable et :

$$\theta'(a) = a^{p-1} - b.$$

Cette dérivée s'annule lorsque $a = b^{\frac{1}{p-1}}$, et est négative pour $a < b^{\frac{1}{p-1}}$ et positive pour $a > b^{\frac{1}{p-1}}$. On a

$$\theta(b^{\frac{1}{p-1}}) = \frac{1}{p}b^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{q}b^q - b^{1+\frac{1}{p-1}} = 0.$$

Ainsi $\theta(a) \geq 0$, i.e.

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

2. a) Soit $f \in L^p(\mu)$ et $g \in L^q(\mu)$. D'après la question précédente, pour tout $\lambda > 0$ et pour μ -presque tout x :

$$|fg|(x) = |\lambda f(x) \cdot \frac{g(x)}{\lambda}| \leq \frac{\lambda^p}{p}|f(x)|^p + \frac{\lambda^{-q}}{q}|g(x)|^q.$$

Ainsi

$$\int_{\Omega} |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu.$$

b) Posons

$$\Phi(\lambda) = \frac{\lambda^p}{p} \int_{\Omega} |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q} \int_{\Omega} |g|^q d\mu.$$

La fonction Φ est dérivable et :

$$\Phi'(\lambda) = \lambda^{p-1} \|f\|_p^p - \lambda^{-q-1} \|g\|_q^q.$$

Cette dérivée s'annule pour $\lambda_1 = \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{1}{p+q}}$, est négative pour $\lambda \leq \lambda_1$ et positive pour $\lambda \geq \lambda_1$. Ainsi le minimum de Φ vaut :

$$\begin{aligned} \Phi(\lambda_1) &= \frac{1}{p} \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{p}{p+q}} \|f\|_p^p + \frac{1}{q} \left(\frac{\|g\|_q^q}{\|f\|_p^p} \right)^{\frac{-q}{p+q}} \|g\|_q^q \\ &= \frac{1}{p} \|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} + \frac{1}{q} \|g\|_q^{\frac{qp}{p+q}} \|f\|_p^{\frac{qp}{p+q}} = \|f\|_p \|g\|_q. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité de Hölder :

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

c) Si $f \in L^1(\mu)$ et $g \in L^\infty(\mu)$, alors $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ pour presque tout $x \in \Omega$ et

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \|g\|_\infty \int_\Omega |f| d\mu,$$

i.e. $\|fg\|_1 \leq \|g\|_\infty \|f\|_1$.

3. Soient $p, p' \in [1, +\infty)$. On suppose $p < p'$. Soit $p < r < p'$. On a

$$|f|^r = |f|^r \mathbb{I}_{|f|>1} + |f|^r \mathbb{I}_{|f|\leq 1} \leq |f|^{p'} \mathbb{I}_{|f|>1} + |f|^p \mathbb{I}_{|f|\leq 1},$$

il en découle,

$$\int_\Omega |f|^r d\mu \leq \int_\Omega |f|^{p'} d\mu + \int_\Omega |f|^p d\mu < +\infty,$$

donc f appartient à $L^r(\mu)$.

4. Supposons que μ soit une mesure finie et soit $f \in L^\infty(\mu)$. Alors

$$|f(x)| \leq \|f\|_\infty,$$

pour presque tout $x \in \Omega$. Ainsi pour tout p

$$\int_\Omega |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \int_\Omega 1 d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(\Omega) < +\infty,$$

ce qui implique que $f \in L^p(\mu)$. En particulier, f appartient à l'intersection $\bigcap_{p \geq 1} L^p(\mu)$.

De plus, pour tout p , on a :

$$\|f\|_p \leq \|f\|_\infty \mu(\Omega)^{\frac{1}{p}},$$

ce qui implique que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty.$$

D'autre part, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\int_{\Omega} |f|^p d\mu \geq \int_{|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)} |f|^p d\mu \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon)).$$

Ainsi pour tout p , il vient

$$\|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon) \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))^{\frac{1}{p}}.$$

Puisque

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \mu(|f| > (\|f\|_\infty - \varepsilon))^{\frac{1}{p}} = 1,$$

il en résulte,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty - \varepsilon.$$

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on a

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p \geq \|f\|_\infty.$$

Donc finalement $\lim_{p \rightarrow +\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$

5. Posons $f_1 = f^r$ et $g_1 = g^r$. On a $f_1 \in L^{\frac{p}{r}}(\Omega)$ et $g_1 \in L^{\frac{q}{r}}(\Omega)$. Notons que l'identité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ entraîne que $\frac{p}{r}, \frac{q}{r} > 1$ et que les nombres $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont conjugués au sens de Young. Par l'inégalité de Hölder on en déduit,

$$\int_{\Omega} (fg)^r d\mu = \int_{\Omega} f_1 g_1 d\mu \leq \left(\int_{\Omega} f_1^{\frac{p}{r}} d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{\Omega} g_1^{\frac{q}{r}} d\mu \right)^{\frac{r}{q}} = \left(\int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{\frac{r}{p}} \left(\int_{\Omega} g^q d\mu \right)^{\frac{r}{q}}.$$

Finalement,

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

6. Si $r = q$ (i.e $\alpha = 1$) ou, $r = p$ (i.e $\alpha = 1$), il n'y a rien à montrer.

Supposons donc que $q < r < p$, on écrit :

$$|f|^r = |f|^{r\alpha} |f|^{r(1-\alpha)},$$

et par application de l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués $\frac{q}{r\alpha}$ et $\frac{p}{r(1-\alpha)}$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f|^r d\mu &\leq \left(\int_{\Omega} (|f|^{r\alpha})^{\frac{q}{r\alpha}} d\mu \right)^{\frac{r\alpha}{q}} \left(\int_{\Omega} (|f|^{r(1-\alpha)})^{\frac{p}{r(1-\alpha)}} d\mu \right)^{\frac{r(1-\alpha)}{p}} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^q d\mu \right)^{\frac{r\alpha}{q}} \left(\int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{\frac{r(1-\alpha)}{p}} < +\infty \\ \|f\|_r^r &\leq \|f\|_q^{r\alpha} \|f\|_p^{r(1-\alpha)}. \end{aligned}$$

Par conséquent, $f \in L^r$ et $\|f\|_r \leq \|f\|_q^\alpha \|f\|_p^{1-\alpha}$.

Exercice 3.7.2 Différentiabilité des normes $\|\cdot\|_p$

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1 < p < +\infty$. La fonction $\varphi(t) = |f(x) + tg(x)|^p$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(x) + tg(x) + hg(x)|^p - |f(x) + tg(x)|^p}{h} \\ &= p|f(x) + tg(x)|^{p-2}(f(x) + tg(x))g(x),\end{aligned}$$

lorsque $f(x)$ et $g(x)$ ont un sens, c'est-à-dire pour presque tout x . De plus, d'après le théorème des accroissements finis, on a

$$\begin{aligned}\frac{|f(x) + tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t} &= \varphi'(t_0) \\ &= p|f(x) + t_0g(x)|^{p-2}(f(x) + t_0g(x))g(x),\end{aligned}$$

pour un certain t_0 compris entre 0 et t . Ainsi pour $|t| \leq 1$,

$$\begin{aligned}\left| \frac{|f(x) + tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t} \right| &= p|f(x) + t_0g(x)|^{p-1}|g(x)| \\ &\leq p(|f(x)| + |g(x)|)^p \\ &\leq 2^{p-1}p(|f(x)|^p + |g(x)|^p),\end{aligned}$$

où la première inégalité découle de l'inégalité triangulaire et de la majoration

$$|g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)|),$$

et où la deuxième inégalité provient de la convexité de la fonction $x \mapsto x^p$ pour $p > 1$ impliquant en particulier :

$$\left(\frac{u+v}{2}\right)^p \leq \frac{u^p}{2} + \frac{v^p}{2}$$

. Il en découle que

$$t \mapsto \frac{|f(x) + tg(x)|^p - |f(x)|^p}{t}$$

est uniformément bornée par une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée permet alors de dériver sous le signe somme et

$$\frac{dN}{dt} \Big|_{t=0} = p \int_{\Omega} |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) d\mu.$$

Exercice 3.7.3 (Inégalité de Hardy)

1. a) On pose $G(x) = \int_0^{+\infty} f(t) \mathbb{I}_{]0,x[} dt$ pour $x \in]0, \infty[$. Comme f est continue, la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$ (et $G' = f$). On en déduit que F est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

Comme f est à support compact dans $]0, \infty[$, il existe $a, A \in]0, \infty[$, $a \leq A$, t.q. $f(x) = 0$ si $x < a$ ou $x > A$. La fonction f est bornée (car continue sur le compact $[a, A]$ et nulle en dehors de ce compact), on note $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a, A]\}$. On a alors $|F(x)| \leq \frac{M(A-a)}{x} \mathbb{I}_{]a, \infty[}(x)$ pour tout $x \in]0, \infty[$. On en déduit que $F \in L^p$ car $p > 1$ (et on aussi $F \in L^\infty$).

- b) Comme $xF(x) = G(x)$, on a bien $xF'(x) + F(x) = G'(x) = f(x)$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En intégrant par parties (entre F^p et 1) sur $]0, n[$, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^n F^p(x) dx &= - \int_0^n p F^{p-1} F'(x) x dx + F^p(n)n \\ &= \int_0^n p F^p(x) dx - \int_0^n p F^{p-1} f(x) dx + F^p(n)n, \end{aligned}$$

et donc :

$$(p-1) \int_0^n F^p(x) dx = \int_0^n p F^{p-1} f(x) dx - F^p(n)n.$$

Comme $0 \leq F^p(n)n \leq \frac{1}{n^{p-1}} M(A-a) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow \infty$ (où a, A, M sont définis à la question précédente) et que $F, f \in L^p$, on en déduit :

$$\int_0^\infty F^p(x) dx = \frac{p}{p-1} \int_0^\infty F^{p-1}(x) f(x) dx.$$

3. En utilisant l'inégalité de Hölder (entre $f \in L^p$ et $F^{p-1} \in L^{\frac{p}{p-1}}$) on déduit de la précédente inégalité :

$$\int_0^\infty F^p(x) dx \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \left(\int_0^\infty F^p(x) dx \right)^{\frac{p-1}{p}},$$

et donc (comme $F \in L^p$) $\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p$.

Exercice 3.7.4 Relations entre les espaces L^p

Si $q \leq p$, alors $L^p \subset L^q$. En utilisant l'inégalité de Hölder pour les réels conjugués : $r = \frac{p}{q}$

et $r' = \frac{p}{p-q}$ telle que $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$. Soit $f \in L^p$, on a

$$\begin{aligned}\|f\|_q^q &= \int_{\Omega} |f|^q d\mu \\ &= \left(\int_{\Omega} |f|^{q \frac{p}{p-q}} d\mu \right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\Omega} 1^{\frac{p}{p-q}} d\mu \right)^{\frac{p-q}{p}} \\ &= \|f\|_p^q (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{p}},\end{aligned}$$

ce qui implique : $\|f\|_q \leq \|f\|_p (\mu(\Omega))^{\frac{p-q}{pq}}$.

Si $f \in L^\infty$, alors

$$\|f\|_p^p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \leq \|f\|_\infty^p \mu(\Omega),$$

ce qui signifie : $\|f\|_p \leq \|f\|_\infty (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}} < \infty$, (i.e $f \in L^\infty$). D'où $L^\infty \subset L^p$.

En conclusion, pour $1 < q < 2 < p < \infty$: $L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega)$.

3.8 Transformation de Fourier

Exercice 3.8.1 1.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\mathbb{I}_{[-T,T]}(t))(\alpha) &= \int_{-T}^T e^{-2i\pi\alpha t} dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\alpha t}}{-2i\pi\alpha} \right]_{-T}^T \\ &= \frac{1}{\pi\alpha} \frac{e^{2i\pi T\alpha} - e^{-2i\pi T\alpha}}{2i} = \frac{\sin(2\pi T\alpha)}{\pi\alpha}.\end{aligned}$$

2. On sait que $\mathbb{I}_{[-T,T]}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi T\alpha)}{\alpha\pi} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha$.

En prenant $T = \frac{1}{2\pi}$, on a donc

$$\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} e^{2i\pi t\alpha} d\alpha = \frac{1}{\pi} \mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(-t),$$

donc $\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(t) = \pi \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(-t)$ et par parité de $\mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}$, on aura donc,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\sin x}{x}\right)(\alpha) = \pi \mathbb{I}_{[-\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{2\pi}]}(\alpha).$$

3.

$$\begin{aligned}F(e^{-|t|/T})(\alpha) &= \int_{-\infty}^0 e^{\frac{t}{T} - 2i\pi\alpha t} dt + \int_0^{+\infty} e^{\frac{-t}{T} - 2i\pi\alpha t} dt \\ &= \left[\frac{e^{\frac{t}{T} - 2i\pi\alpha t}}{\frac{1}{T} - 2i\pi\alpha} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{\frac{-t}{T} - 2i\pi\alpha t}}{\frac{-1}{T} - 2i\pi\alpha} \right]_0^{+\infty},\end{aligned}$$

en conséquence,

$$F(e^{-|t|/T})(\alpha) = \frac{T}{1 - 2i\pi T\alpha} + \frac{T}{1 + 2i\pi T\alpha} = \frac{2T}{1 + 4\pi^2 T^2 \alpha^2}.$$

4. On sait que $e^{-|t|/T} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2T}{1+4\pi^2 T^2 \alpha^2} e^{2i\pi t \alpha} d\alpha$. En prenant $T = \frac{1}{2\pi}$, on a alors

$$e^{-2\alpha|t|} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\alpha^2} e^{2i\pi t \alpha} d\alpha = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\right)(-t),$$

et, comme $t \mapsto e^{-2\alpha|t|}$ est paire. On a donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}\right)(\alpha) = e^{-2\pi|\alpha|}.$$

Exercice 3.8.2 1. $f_T(t) = \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi t x} \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi t u} f(u) du dx$. On peut appliquer le théorème de Fubini car

$$\int_{-T}^T \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) |f(u)| du dx = T \int_{\mathbb{R}} |f(u)| du,$$

est fini. On a alors, avec $t - u = s$,

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi(t-u)x} dx \right) f(u) du = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi s x} dx \right) f(t-s) ds.$$

Puis

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \left(1 - \frac{|x|}{T}\right) e^{2i\pi s x} dx &= \int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right) e^{2i\pi s x} dx + \int_{-T}^0 \left(1 + \frac{x}{T}\right) e^{2i\pi s x} dx \\ &= \int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right) e^{2i\pi s x} dx - \int_T^0 \left(1 - \frac{x}{T}\right) e^{-2i\pi s x} dx \\ &= 2 \int_0^T \left(1 - \frac{x}{T}\right) \cos(2\pi s x) dx \\ &= \left[\left(1 - \frac{x}{T}\right) \frac{\sin(2\pi s x)}{\pi s} \right]_0^T + \frac{1}{T\pi s} \int_0^T \sin(2\pi s x) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi^2 T s^2} \left[-\cos(2\pi s x) \right]_0^T = \frac{1 - \cos(2\pi s T)}{2\pi^2 T s^2} = \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2}. \end{aligned}$$

On parvient ainsi à

$$f_T(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2} f(t-s) ds.$$

Or avec $s \rightarrow -s$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^0 \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2} f(t-s) ds &= \int_{+\infty}^0 \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2} f(t+s) d(-s) \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2} f(t+s) ds \end{aligned}$$

et

$$f_T(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(\pi s T)}{\pi^2 T s^2} (f(t+s) + f(t-s)) ds.$$

2.

$$\int_{\varepsilon}^A \frac{\sin^2 u}{u^2} du = \left[-\frac{\sin^2 u}{u} \right]_{\varepsilon}^A + 2 \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin u \cos u}{u} du \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0, A \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u} du,$$

et, avec le changement de variable $t = 2u$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(2u)}{u} du = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad \text{donc} \quad I = \frac{\pi}{2}.$$

3. D'après 1) et 2), $f_T(t) - \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} g_T(u, t) du$ où

$$g_T(u, t) = \frac{\sin^2 u}{u^2} \left(f\left(t + \frac{u}{\pi T}\right) + f\left(t - \frac{u}{\pi T}\right) - f(t^+) - f(t^-) \right),$$

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} g_T(u, t) = 0 \quad \text{et} \quad |g_T(u, t)| \leq 4M \frac{\sin^2 u}{u^2}$$

où $M = \sup_I |f|$. Ce qui achèvera notre démonstration grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 3.8.3 Posons $g_c(t) = \frac{1}{t^2 + c^2}$. On a alors $f * g_a = g_b$ donc $\widehat{f} \cdot \widehat{g}_a = \widehat{g}_b$. Grâce aux tables de transformées de Fourier, on a

$$\widehat{\frac{1}{\pi(1+t^2)}}(\alpha) = e^{-2\pi|\alpha|},$$

d'où

$$\widehat{\frac{1}{c^2(1+t^2)}}(\alpha) = \frac{\pi}{c^2} e^{-2\pi|\alpha|} \quad \text{et} \quad \widehat{\frac{1}{c^2\left(1+\left(\frac{t}{c}\right)^2\right)}}(\alpha) = c \cdot \frac{\pi}{c^2} e^{-2\pi|c\alpha|} = \frac{\pi}{c} e^{-2\pi|c\alpha|}.$$

On a alors $\widehat{f} = \frac{\widehat{g}_b}{\widehat{g}_a} = \frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|\alpha|}$.

On procède par transformées inverses successives :

$$\frac{a}{b} e^{-2\pi(b-a)|\alpha|} \longrightarrow \frac{a}{b} \frac{1}{\pi \left(1 + \left(\frac{t}{b-a}\right)^2\right)} \times \frac{1}{b-a},$$

d'où

$$f(t) = \frac{a(b-a)}{b} \frac{1}{\pi((b-a)^2 + t^2)}.$$

Exercice 3.8.4 $f'(x) = -2\pi x f(x)$ donc $\mathcal{F}(f') = -2\pi \mathcal{F}(tf(t))$ (existe car $t \mapsto tf(t) \in L^1$). Il vient alors

$$(2i\pi\alpha)\widehat{f}(\alpha) = -2\pi \frac{1}{-2i\pi} (\widehat{f})'(\alpha).$$

Soit $(\widehat{f})'(\alpha) + 2\pi\alpha\widehat{f}(\alpha) = 0$. La solution générale de cette équation s'écrit

$$\widehat{f}(\alpha) = Ke^{-\pi\alpha^2}.$$

Sachant que $K = \widehat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi x^2} dx = 1$, on en déduit

$$\widehat{f}(\alpha) = e^{-\pi\alpha^2}.$$

Exercice 3.8.5 1.

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} dx f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-2\pi i(x,y)} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x,y)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx. \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f * g(y)e^{-2\pi i(x,y)} dy = \int_{\mathbb{R}^n} dy e^{-2\pi i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^n} f(y-z)g(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} dy \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,y-z)} e^{-2\pi i(x,z)} f(y-z)g(z)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,u)} f(u)du \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i(x,z)} g(z)dz \\ &= \widehat{f}(x)\widehat{g}(x). \end{aligned}$$

Exercice 3.8.6 L'égalité de Parseval Plancherel, nous dit que pour une fonction de carré intégrable, ce qui est le cas pour $(\frac{\sin x}{x})^2$, on a la formule de conservation de l'énergie :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 d\lambda,$$

il suffit donc de calculer

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 d\lambda = \pi^2 \int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}} (1 - \pi|\lambda|)^2 d\lambda.$$

Pour une intégration de ce type, on doit absolument se débarrasser de la valeur absolue, soit en séparant en deux cas, $\lambda > 0$ et $\lambda < 0$, soit comme ici, par un argument de parité.

En effet, la fonction $(1 - \pi|\lambda|)^2$ est paire, donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\lambda)^2 d\lambda &= 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1 - \pi\lambda)^2 d\lambda = 2\pi^2 \int_0^{\frac{1}{\pi}} (1 - 2\pi\lambda + \pi^2\lambda^2) d\lambda \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{1}{\pi} - 2\pi \frac{1}{2\pi^2} + \pi^2 \frac{1}{3\pi^3} \right] \\ &= 2\pi^2 \left[\frac{1}{\pi} - \frac{1}{\pi} + \frac{1}{3\pi} \right] = \frac{2}{3}\pi. \end{aligned}$$

Exercice 3.8.7 Soit $\widehat{\phi}(\alpha, y) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx$. Alors

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} e^{-2i\pi\alpha x} dx = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx \right) = \frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2}(\alpha, y).$$

D'autre part, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx$ peut être intégré par parties

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx &= \left[\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + 2i\pi\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx \\ &= 2i\pi\alpha \left[\phi(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} \right]_{-\infty}^{+\infty} - 4\pi^2\alpha^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx \\ &= -4\pi^2\alpha^2 \widehat{\phi}(x, y). \end{aligned}$$

On a utilisé la condition que ϕ et sa dérivée partielle par rapport à x tendent vers 0 quand $x \rightarrow \pm\infty$. Alors si on prend la transformée de Fourier de l'équation de Laplace, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right)(x, y) e^{-2i\pi\alpha x} dx = 0.$$

Soit $\frac{\partial^2 \widehat{\phi}}{\partial y^2}(x, y) - 4\pi^2\alpha^2 \widehat{\phi}(x, y) = 0$. Comme $\widehat{\phi} \rightarrow 0$ pour y grand, la solution est

$$\widehat{\phi}(\alpha, y) = C e^{-2\pi|\alpha|y}.$$

On applique alors la condition pour $y = 0$

$$\widehat{\phi}(\alpha, 0) = C = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) e^{-2i\pi\alpha x} dx = \int_{-1}^1 e^{-2i\pi\alpha x} dx = \frac{e^{2i\pi\alpha} - e^{-2i\pi\alpha}}{2i\pi\alpha} = \frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha}$$

et donc

$$C = \frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha} \quad \text{et} \quad \widehat{\phi}(\alpha, y) = \frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha} e^{-2\pi|\alpha|y}.$$

Or on a $e^{-2\pi|\alpha|y} = \mathcal{F}\left(\frac{y}{\pi t^2 + y^2}\right)(\alpha)$ et $\frac{\sin 2\pi\alpha}{\pi\alpha} = \mathcal{F}(\phi(x, 0))(\alpha)$.

On sait que $\mathcal{F}(F) \cdot \mathcal{F}(G) = \mathcal{F}(F * G)$ donc

$$\phi(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{(x - \tau)^2 + y^2} = \frac{1}{\pi} \left(\arctan\left(\frac{x-1}{y}\right) + \arctan\left(\frac{x+1}{y}\right) \right).$$

3.9 Transformation de Laplace

Exercice 3.9.1 1.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f_1)(t) &= \mathcal{L}(\cos^2 t) = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} (1 + \cos 2t) e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1}{p(p^2 + 4)} \left[e^{-pt} (p^2 \cos 2t + p^2 - 2p \sin 2t + 4) \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{-1}{p(p^2 + 4)} (p^2 + p^2 + 4) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2 + 4} \right).
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f_2)(t) &= \mathcal{L}(te^{-t} \cos t) = \int_0^{+\infty} te^{-t} \cos t e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{(p^2 + 2p + 2)^2} \left[e^{-(p+1)t} (p^2 t + 2p(t+1) + 2(t+1)) \sin t \right. \\
 &\quad \left. - p^3 t + p^2(3t+1) + p(4t+2) + 2t \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{p^2 + 2p}{(p^2 + 2p + 2)^2}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f_3)(t) &= \mathcal{L}(\cosh at) = \int_0^{+\infty} \cosh at e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}(e^{at}) + \mathcal{L}(e^{-at}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right] \\
 &= \frac{p}{p^2 - a^2}.
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(f_4)(t) &= \mathcal{L}(\sinh at) = \int_0^{+\infty} \sinh at e^{-pt} dt \\
 &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{L}(e^{at}) - \mathcal{L}(e^{-at}) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{p-a} - \frac{1}{p+a} \right] \\
 &= \frac{a}{p^2 - a^2}.
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f_5)(t) &= \mathcal{L}(t^n) = \int_0^{+\infty} t^n e^{-pt} dt \\
&= \frac{1}{p} \left[t^n e^{-pt} \right]_0^{+\infty} + \frac{n}{p} \int_0^{+\infty} t^{n-1} e^{-pt} dt = \frac{n}{p} \mathcal{L}(t^{n-1}) \\
&= \frac{n}{p} \frac{n-1}{p} \mathcal{L}(t^{n-2}) \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)}{p^3} \mathcal{L}(t^{n-3}) \\
&\vdots \\
&= \frac{n!}{p^n} \mathcal{L}(1) = \frac{n!}{p^{n+1}}.
\end{aligned}$$

Exercice 3.9.2 a) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}$. Par fraction simple on a :

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{2p+1}{(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} \\
&= \frac{5}{p+3} - \frac{3}{p+2}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{p+3}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{p+2}\right) \\
&= 5e^{-3t} - 3e^{-2t}.
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
F(p) &= \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)} = e^{-3p} \left[\frac{Ap+B}{p^2} + \frac{C}{p-1} \right] \\
&= e^{-3p} \left[\frac{-p-1}{p^2} + \frac{1}{p-1} \right] \\
&= e^{-3p} \left[\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} \right].
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}\right) = u(t-3)[e^{t-3} - 1 - (t-3)] \\
&= u(t-3)[e^{t-3} - t + 2].
\end{aligned}$$

c) $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$, puisque $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p^2+\omega^2}\right) = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$, alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p(p^2+\omega^2)}\right) &= f(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin \omega \tau d\tau \\
&= \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t).
\end{aligned}$$

d) $\mathcal{L}(f) = e^{-\pi p} \frac{p}{p^2+4} = F(p)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}(F(p)) &= u(t - \pi) \cos(2(t - \pi)) \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq t \leq \pi \\ \cos(2(t - \pi)), & \text{si } \pi < t. \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 3.9.3 On note $\mathcal{L}(y) = Y(p)$

1. $y' + y = 1$ avec $y(0) = 0$, on transforme l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} pY(p) - y(0) + Y(p) &= \mathcal{L}(1) \Rightarrow (p+1)Y(p) = \frac{1}{p} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{1}{p(p+1)} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}, \end{aligned}$$

par la transformée inverse de Laplace on obtient :

$$\mathcal{L}(Y)(p) = y(t) = 1 - e^{-t}.$$

2. $y'' + 2y' + 5y = 0$ avec $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$, on transforme l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^2Y(p) - py(0) - y'(0) + 2(pY(p) - py(0)) + 5Y(p) &= 0 \\ \Rightarrow p^2Y(p) - 2p + 4 + 2pY(p) - 4 + 5Y(p) &= 0 \\ \Rightarrow Y(p)(p^2 + 2p + 5) &= 2p \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{2p}{p^2 + 2p + 5} = \frac{2p}{p^2 + 2p + 4 + 1} = \frac{2p + 2 - 2}{(p+1)^2 + 2^2} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{2(p+1) - 2}{(p+1)^2 + 2^2} = \frac{2(p+1)}{(p+1)^2 + 2^2} - \frac{2}{(p+1)^2 + 2^2}. \end{aligned}$$

On a donc par la transformée inverse :

$$y(t) = 2e^{-t} \cos 2t - e^{-t} \sin 2t.$$

3. $y'' + 3y = \sin(t)$ avec $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, on transforme l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) + 3Y(p) &= \mathcal{L}(\sin t) \\ \Rightarrow p^2 Y(p) - p - 2 + 3Y(p) &= \frac{1}{p^2 + 1} \\ \Rightarrow Y(p)(p^2 + 3) &= p + 2 + \frac{1}{p^2 + 1} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{p + 2}{p^2 + 3} + \frac{1}{(p^2 + 3)(p^2 + 1)} = \frac{p + 3/2}{p^2 + 3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 + 1} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{p}{p^2 + 3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{p^2 + 3} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 + 1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \sin(t).$$

4. $y''' + 5y'' + 6y = 0$ avec $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 7$, on transforme l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \Rightarrow p^3 Y(p) - 3p^2 + 2p - 7 + 5(p^2 Y(p) - 3p + 2) + 6(pY(p) - 3) &= 0 \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{3p^2 + 13p + 15}{p(p^2 + 5p + 6)} = \frac{3p^2 + 13p + 15}{p(p + 2)(p + 3)} \\ \Rightarrow Y(p) &= \frac{5}{2} \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \frac{1}{p + 2} + \frac{1}{p + 3}. \end{aligned}$$

Finalement

$$y(t) = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} e^{-2t} + e^{-3t}.$$

Exercice 3.9.4

$$\begin{aligned} y(t) &= t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau \\ &= t + y * \sin t. \end{aligned}$$

Donc par la transformée de Laplace on obtient

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{1}{p^2} + Y(p) \frac{1}{p^2 + 1} \\ &= \frac{p^2 + 1}{p^4} = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}. \end{aligned}$$

Enfin

$$y(t) = t + \frac{1}{6} t^3.$$

Exercice 3.9.5 *En utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales, calculer $s(t \rightarrow 0^+)$ et $s(t \rightarrow \infty)$ pour les fonctions suivantes :*

1. $S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}$

- Calcul de $s(t \rightarrow 0^+)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 1.$$

- Calcul de $s(t \rightarrow \infty)$: *Avant de calculer $s(t \rightarrow \infty)$, il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides :*

$$pS(p) = p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = p \frac{p^2 + 2p + 4}{p(p+1)(p+2)},$$

$p.S(p)$ a 3 pôles $(0, -1, -2)$ placés dans le demi-plan gauche du plan complexe. Donc aucun pôle sur l'axe imaginaire (à l'exception du pôle à l'origine), et aucun pôle dans le demi-plan droit. Dans ce cas, on peut calculer $s(t \rightarrow \infty)$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = \lim_{p \rightarrow 0^+} pS(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} p \frac{p^2 + 2p + 4}{p^3 + 3p^2 + 2p} = 2.$$

2. $S(p) = \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p}$

- Calcul de $s(t \rightarrow 0^+)$:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} s(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pS(p) = \lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = \infty. \quad (\text{cause de l'implusion})$$

- Calcul de $s(t \rightarrow \infty)$: *Avant de calculer $s(t \rightarrow \infty)$, il faudrait vérifier que les conditions nécessaires à cela soient valides :*

$$pS(p) = p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p^3 + 4p} = p \frac{p^3 + 2p^2 + 6p + 8}{p(p^2 + 4)} = p + 2 + \frac{2p}{p^2 + 4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \mathcal{L}^{-1}(S(p)) = \delta(t) + 2 + \sin(2t), \quad t \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = 0 + 2 + ? = ?. \quad (\text{cause du sinus qui varie continuellement})$$