



Examen

Exercice N° 01: (5 Points)

Soit (Ω, M, μ) un espace mesuré fini ($\mu(\Omega) < \infty$).

1- Donner la définition de la norme de l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$.

2- Montrer que : Si $f \in L^\infty(\Omega)$ on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p sur Ω .

3- Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\|f\|_\infty > 0$. Si l'on a : $I_n = \int_\Omega |f|^n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

Vérifier que : $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|f\|_\infty$.

Exercice N° 02: (10 Points)

I) Calculer la transformée de Fourier de la fonction suivante :

$$f(x) = H(x)e^{-\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside définie par : $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

2) En déduire la transformée de Fourier de : $g(x) = e^{-\alpha|x|}$.

3) En déduire la transformée de Fourier de : $H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

II) Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{4}{5-2x+x^2}.$$

- Sachant que $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|}$, déterminer $\hat{g}(\omega)$.

Exercice N° 03: (5 Points)

Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 3y(t) = \sin(t) \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad (2)$$

Bonne chance

Dr. Ali KHALOUTA

Corrigé Type Examen « Transformation intégrale dans les espaces L_p »

Exercice 1 (5 Points) :

Soit (Ω, M, μ) un espace mesuré fini ($\mu(\Omega) < \infty$).

1- La définition de la norme de l'espace de Lebesgue $L^\infty(\Omega)$ est :

$$\|f\|_\infty = \inf \{C : |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

01

2- On montre que : Si $f \in L^\infty(\Omega)$ on a $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ p.p sur Ω .

En effet il existe une suite C_n telle que $C_n \rightarrow \|f\|_\infty$ et pour chaque n on a $|f(x)| \leq C_n$ p.p sur Ω . Donc $|f(x)| \leq C_n$ pour tout $x \in \Omega \setminus E_n$ avec E_n négligeable.

01

On pose $E = \bigcup_n E_n$ de sorte que E est négligeable et l'on a $|f(x)| \leq C_n$ pour tout n et pour tout $x \in \Omega \setminus E$.

01

0.5

Par conséquent $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ pour tout $x \in \Omega \setminus E$.

3- Soit $f \in L^\infty(\Omega)$ tel que $\|f\|_\infty > 0$. Si l'on a : $I_n = \int_\Omega |f|^n d\mu$, $n \in \mathbb{N}$.

On vérifie que : $\frac{I_{n+1}}{I_n} \leq \|f\|_\infty$

On a

$$\begin{aligned} I_{n+1} &\leq \int_\Omega |f|^{n+1} d\mu = \int_\Omega |f|^n |f| d\mu \\ &\leq \int_\Omega |f|^n \|f\|_\infty d\mu \leq \|f\|_\infty \int_\Omega |f|^n d\mu \\ &\leq \|f\|_\infty I_n \\ \Rightarrow \frac{I_{n+1}}{I_n} &\leq \|f\|_\infty \end{aligned}$$

01

0.5

Exercice 2 (10 Points) :

On calcule la transformée de Fourier de la fonction suivante :

$$f(x) = H(x)e^{-\alpha x} = \begin{cases} e^{-\alpha x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad \alpha > 0,$$

où $H(x)$ est la fonction de Heaviside définie par : $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$.

$$\begin{aligned} \hat{f}(\omega) &= F(f(x))(\omega) = F(H(x)e^{-\alpha x})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} H(x)e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \omega x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(\alpha + 2\pi i \omega)x} dx = \frac{1}{\alpha + 2\pi i \omega} \end{aligned}$$

0.5

0.5

2) En déduire la transformée de Fourier de : $g(x) = e^{-\alpha|x|}$.

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega) &= F(g(x))(\omega) = F(e^{-\alpha|x|})(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|} e^{-2\pi i \omega x} dx = \int_{-\infty}^0 e^{\alpha x} e^{-2\pi i \omega x} dx + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} e^{-2\pi i \omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha - 2\pi i \omega)x} dx + \frac{1}{\alpha + 2\pi i \omega} \\ &= \frac{1}{\alpha - 2\pi i \omega} + \frac{1}{\alpha + 2\pi i \omega} = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 4\pi^2 \omega^2}\end{aligned}$$

3) En déduire la transformée de Fourier de : $H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}, n \in \mathbb{N}^*$.

On a

$$\frac{d^{(n-1)}}{d\omega^{n-1}} \hat{f}(\omega) = F((-2\pi i x)^{n-1} H(x) e^{-\alpha x})(\omega) \Rightarrow F\left(H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}\right)(\omega) = \frac{1}{(-2\pi i)^{n-1} (n-1)!} \frac{d^{(n-1)}}{d\omega^{n-1}} \hat{f}(\omega)$$

On utilise la dérivée successive obtient

$$\frac{d^{(1)}}{d\omega} \hat{f}(\omega) = \frac{-2\pi i \omega}{(\alpha + 2\pi i \omega)^2} = \frac{(-2\pi i \omega)^1 1!}{(\alpha + 2\pi i \omega)^2}$$

$$\frac{d^{(2)}}{d\omega^2} \hat{f}(\omega) = \frac{(-2\pi i \omega)^2 2!}{(\alpha + 2\pi i \omega)^3}$$

$$\frac{d^{(3)}}{d\omega^3} \hat{f}(\omega) = \frac{(-2\pi i \omega)^3 3!}{(\alpha + 2\pi i \omega)^4}$$

$\vdots$

$$\frac{d^{(n-1)}}{d\omega^{n-1}} \hat{f}(\omega) = \frac{(-2\pi i \omega)^{n-1} (n-1)!}{(\alpha + 2\pi i \omega)^n}$$

Donc

$$F\left(H(x) \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha x}\right)(\omega) = \frac{1}{(-2\pi i)^{n-1} (n-1)!} \times \frac{(-2\pi i \omega)^{n-1} (n-1)!}{(\alpha + 2\pi i \omega)^n} = \frac{1}{(\alpha + 2\pi i \omega)^n}$$

II) Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad g(x) = \frac{4}{5-2x+x^2}.$$

- Sachant que $\hat{f}(\omega) = \pi e^{-2\pi|\omega|}$, déterminer $\hat{g}(\omega)$.

On a

$$g(x) = \frac{4}{5-2x+x^2} = \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 1}$$

01

01

ce qui implique que

$$g(x) = \left(h_{\frac{1}{2}}(\phi_1 f) \right)(x) = f\left(\frac{x-1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}(x-1)\right)$$

01

01

alors

$$\hat{g}(\omega) = F\left(\left(h_{\frac{1}{2}}(\phi_1 f)\right)(x)\right)(\omega) = 2(\hat{\phi}_1 f)(2\omega) = 2e^{-2\pi i(2\omega)} \hat{f}(2\omega) = 2e^{-4\pi i\omega} \pi e^{-2\pi|2\omega|}$$

Exercice 1 (5 Points) :

On utilise la transformée de Laplace pour résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y''(t) + 3y(t) = \sin(t) \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 2 \quad (2)$$

En appliquant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation (1) et en utilisant la propriété de linéarité on obtient :

$$L(y''(t)) + 3L(y(t)) = L(\sin(t))$$

0.5

En utilisant la transformée de Laplace de la dérivée deuxième, on a

$$p^2 L(y(t)) - py(0) - y'(0) + 3L(y(t)) = L(\sin(t))$$

0.5

En remplaçant les conditions initiales (2), on trouve

$$p^2 L(y(t)) - p - 2 + 3L(y(t)) = L(\sin(t))$$

0.5

Par un calcul simple, on

$$(p^2 + 3)L(y(t)) = p + 2 + \frac{1}{p^2 + 1}$$

01

Ce qui implique que

$$\begin{aligned} L(y(t)) &= \frac{p+2}{p^2+3} + \frac{1}{(p^2+3)(p+1)} = \frac{p+2}{p^2+3} + \frac{-\frac{1}{2}}{p^2+3} + \frac{\frac{1}{2}}{p^2+1} \\ &= \frac{p+\frac{3}{2}}{p^2+3} + \frac{\frac{1}{2}}{p+1} = \frac{p}{p^2+3} + \frac{\frac{3}{2}}{p^2+3} + \frac{\frac{1}{2}}{p^2+1} \\ &= \frac{p}{p^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}}{p^2+(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{p^2+1} \end{aligned}$$

1.5

En appliquant la transformée de Laplace inverse on trouve la solution des équations (1) et (2) comme suit :

$$y(t) = \cos(\sqrt{3}t) + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}t) + \frac{1}{2} \sin(t)$$

01

Dr. Ali KHALOUTA