Transformation intégrale dans les espaces Lp

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université Ferhat ABBAS Sétif 1

Jeudi 29 Mai 2025

Durée : 1h 30m

3ème Année L.M.D – Maths

Département de Mathématiques

Faculté des Sciences

Examen

Exercice N° 01: (05 Points)

1- Soit $L^p(\Omega)$ un espace de Lebesgue sur $\Omega \in IR$ avec $1 \le p \le \infty$. On définit l'exposant conjugué de p par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, avec $\frac{1}{\infty} = 0$.

Compléter le tableau suivant :

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p(\Omega)$, $1 < p < \infty$			
$L^1(\Omega)$			
$L^\infty(\Omega)$			

2- D'après le théorème de Fubini, calculer

$$I = \iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} dx\,dy$$

telle que $D = \{(x,y)/0 \le x \le y\}$.

Exercice N° 02: (08 Points)

1) Trouver la transformée de Fourier de la fonction suivante :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \le a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$$

2) En utilisant la transformée de Fourier inverse calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\,(2\pi\omega\, x)\sin\,(2\pi\omega\, a)}{\omega} d\,\omega$$

3) En déduit la valeur de l'intégrale

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\,(\omega)}{\omega} d\,\omega$$

II) On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $g(x)=\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2$ est la fonction $\hat{g}(\omega)=\pi(1-\pi|\omega|)\chi_{\left[-\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\pi}\right]}(\omega)$

Déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 dx$$

<u>Exercice N° 03: (07 Points)</u>

1) Soient f une fonction périodique de période $T>0$ et $F(p)=L(f(t))$ sa transformée de Laplace. Montrer que

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{Tp}}\int_0^T f(t)e^{-pt}\,dt.$$

2) Utiliser la transformée de Laplace pour résoudre l'équation intégro-différentielle

$$y''(t)+\int_0^t e^{2(t-s)}\,y'(s)\,ds=e^{2t}, \qquad (1)$$

avec les conditions initiales

$$y(0)=0 \ , \ y'(0)=1. \qquad (2)$$

Bonne chance **Dr. Ali KHALOUTA**

Corrigé Type Examen « Transformation intégrale dans les espaces Lp »

Exercice 1 (05 Points) :

Compléter le tableau suivant :

	Réflexif	Séparable	Espace dual
$L^p(\Omega)$, $1<p<\infty$	OUI	OUI	$L^q(\Omega)$
$L^1(\Omega)$	NON	OUI	$L^\infty(\Omega)$
$L^\infty(\Omega)$	NON	NON	Contient strictement $L^1(\Omega)$

0.25+0.25+0.5

0.25+0.25+0.5

0.25+0.25+0.5

2- La fonction $(x,y)\to \dfrac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}$ est continue et positive sur $D=\{(x,y)/0\le x\le y\}$, donc mesurable, on peut donc appliquer le théorème de Fubini. Alors x varie de 0 à y avec y un réel positif.

$$I=\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\,dy$$

0.5

$$=\int_0^{+\infty}\left(\int_0^y \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dx\right)dy$$

0.5

$$=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+y^2}\arctan\ y\ dy$$

0.5

$$=\left[\frac{(\arctan\ y)^2}{2}\right]_0^{+\infty}$$

0.5

$$=\frac{\pi^2}{8}$$

0.5

Exercice 2 (08Points) :

I) On trouve la transformée de Fourier de la fonction suivante :

$$f(x)=\begin{cases}1 & si\quad |x|\le a\\ 0 & si\quad |x|>a\end{cases}$$

0.5

$$\hat{f}(\omega)=F(f(x))(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2\pi i\,\omega x}\,dx=\int_{-a}^{a} e^{-2\pi i\,\omega x}\,dx$$

0.5

$$=\left[-\frac{1}{2\pi i\,\omega}e^{-2\pi i\,\omega x}\right]_{-a}^{a}$$

0.5

$$=\frac{1}{\pi\omega}\left(\frac{e^{2\pi i\,\omega a}-e^{-2\pi i\,\omega a}}{2i}\right)$$

$$=\frac{\sin(2\pi\omega\, a)}{\pi\ \omega}$$

0.5

2) On utilise la transformée de Fourier inverse calculer l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\ (2\pi\omega\, x)\sin\,(2\pi\omega\, a)}{\omega}\, d\,\omega$$

Pour cala, on a

0.5

$$F^{-1}(\hat{f}(\omega)) = f(x) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\,\omega x}\ \hat{f}(\omega)\,d\omega = f(x)$$

0.5

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\cos(2\pi\,\omega x) + i\sin(\,2\pi\,\omega x\,)\right) \frac{\sin\,(2\pi\,\omega\, a)}{\pi\ \omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \le a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$$

0.5

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi\,\omega x)\ \frac{\sin\,(2\pi\,\omega\, a)}{\pi\ \omega}\, d\omega + i\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\,2\pi\,\omega x)\ \frac{\sin\,(2\pi\,\omega\, a)}{\pi\ \omega}\, d\omega$$

$$= \begin{cases} 1 & si \quad |x| \le a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$$

0.5

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi\,\omega x)\ \sin\,(2\pi\,\omega\, a)}{\pi\ \omega}\, d\omega = \begin{cases} 1 & si \quad |x| \le a \\ 0 & si \quad |x| > a \end{cases}$$

0.5

3) Pour $x=0$ et $a = \dfrac{1}{2\pi}$, on a

0.5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\,(\pi\omega)}{\omega}\, d\,\omega = \pi$$

0.5

$$\Rightarrow 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\,(\pi\omega)}{\omega}\, d\,\omega = \pi$$

0.5

$$\Rightarrow \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin\,(\pi\omega)}{\omega}\, d\,\omega = \frac{\pi}{2}$$

II) On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $g(x) = \left(\dfrac{\sin\,(x)}{x}\right)^2$ est la fonction $\hat{g}(\omega) = \pi(1-\pi|\omega|)\chi_{\left[-\frac{1}{\pi}\,\frac{1}{\pi}\right]}(\omega)$

On déduire par l'égalité de Parseval-Plancherel la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin\,(x)}{x}\right)^4 d\,x$

On a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 d\,x=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)^2 d\,x$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|g(x)|^2\,d\,x$$

0.5

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(\omega)|^2\,d\,\omega$$

Donc, il suffit de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(\omega)|^2\,d\,\omega=?$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|\hat{g}(\omega)|^2\,d\,\omega=\pi^2\int_{-\frac{1}{\pi}}^{\frac{1}{\pi}}(1-\pi|\omega|)^2\,d\,\omega$$

$$=2\pi^2\int_{0}^{\frac{1}{\pi}}(1-\pi\,\omega)^2\,d\,\omega$$

01

$$=2\pi^2\int_{0}^{\frac{1}{\pi}}(1-2\pi\omega+\omega^2)\,d\,\omega$$

$$=2\pi^2\left[\omega+\pi\omega^2+\frac{\omega^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\pi}}$$

$$=\frac{2\pi}{3}$$

Donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^4 d\,x=\frac{2\pi}{3}$$

0.5

Exercice 1 (07 Points) :

1) Soient f une fonction périodique de période $T>0$ et $F(p)=L(f(t))$ sa transformée de Laplace. Montrer que

$$F(p)=\frac{1}{1-e^{Tp}}\int_0^T f(t)\,e^{-pt}\,dt\,.$$

Pour cela, on a

0.5

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt \\
&= \int_0^{T} f(t)e^{-pt}\,dt + \int_T^{2T} f(t)e^{-pt}\,dt + \int_{2T}^{3T} f(t)e^{-pt}\,dt + \dots \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kT}^{(k+1)T} f(t)e^{-pt}\,dt
\end{aligned}
$$

0.5 **0.5**

On pose $u = t - kT$, donc on a

0.5

$$
\begin{aligned}
F(p) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{T} f(u+kT)e^{-p(u+kT)}\,du \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \int_0^{T} f(u)e^{-pu}e^{-pkT}\,du\,, \quad (Car\ \ f\ est\ \ périodique\ ) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} (e^{-pT})^k \int_0^{T} f(u)e^{-pu}\,du \\
&= \frac{1}{1-e^{Tp}} \int_0^{T} f(u)e^{-pu}\,du
\end{aligned}
$$

0.5 **0.5**

2) On utilise la transformée de Laplace pour résoudre l'équation intégro-différentielle

$$y''(t) + \int_0^t e^{2(t-s)}\, y'(s)\,ds = e^{2t}\,, \qquad (1)$$

avec les conditions initiales

$$y(0) = 0\ ,\ y'(0) = 1. \qquad (2)$$

En appliquant la transformée de Laplace des deux côtés de l'équation (1) et en utilisant la propriété de linéarité on obtient :

0.5

$$L\left(y''(t)\right) + L\left(\int_0^t e^{2(t-s)}\, y'(s)\,ds\right) = L\left(e^{2t}\right)$$

En utilisant la transformée de Laplace de la dérivée première et deuxième, et la propriété de la convolution, on a

0.5

$$p^2 L\left(y(t)\right) - py(0) - y'(0) + L\left(e^{2t} * y'(t)\right) = L\left(e^{2t}\right)$$

0.5

$$p^2 L\left(y(t)\right) - py(0) - y'(0) + L\left(e^{2t}\right)L\left(y'(t)\right) = L\left(e^{2t}\right)$$

0.5

$$p^2 L\left(y(t)\right) - py(0) - y'(0) + \frac{1}{p-2}\left(p\,L\left(y(t)\right) - y(0)\right) = \frac{1}{p-2}$$

En replaçant les conditions initiales (2), et par un calcule simple, on trouve

$$L\left(y(t)\right)=\frac{1}{p\left(p-1\right)}$$

01

En appliquant la transformée de Laplace inverse on trouve la solution des équations (1) et (2) comme suit :

$$\begin{aligned} y(t) &= L^{-1}\left(L\left(y(t)\right)\right) \\ &= L^{-1}\left(\frac{1}{p\left(p-1\right)}\right) \\ &= L^{-1}\left(\frac{1}{p-1}-\frac{1}{p}\right) \\ &= e^{t}-1 \end{aligned}$$

01