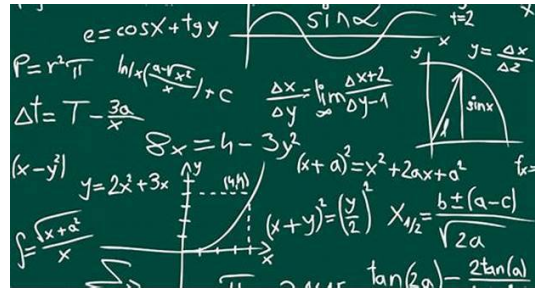


Mathématiques appliquées



Dr. Bouchelaghem Abderraouf

Université Ferhat Abbas Sétif 1

Département de mathématiques

Email : abderraouf.bouchelaghem@univ-setif.dz

Table des matières



Objectifs	4
I - Fiche-contact	5
II - Préface	6
III - Pré-requis	7
1. Pré-requis	7
2. Test des pré-requis	7
IV - Intégrales simples et multiples	10
1. Objectifs	10
2. Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives	11
2.1. <i>Intégrale de Riemann</i>	11
2.2. <i>Propriétés de l'intégral de Rieman</i>	12
2.3. <i>Calcul des primitives</i>	13
3. Intégrale double	16
3.1. <i>Intégrale double</i>	16
3.2. <i>Propriétés des intégrales doubles</i>	16
3.3. <i>Calcul des intégrales doubles</i>	18
3.4. <i>Application au calcul des aires</i>	19
4. Intégrales triples	20
4.1. <i>Propriétés des intégrales triples</i>	21
4.2. <i>Calcul des intégrales triples</i>	22
4.3. <i>Application au calcul des volumes</i>	25
4.4. <i>Exercice :</i>	25
V - TD 1	26
1. Exercice : 1	26
2. Exercice : 2	26
3. Exercice : 3	26
4. Exercice : 4	26
VI - Intégrale impropres	27
1. Objectifs	27

2. Intégrale impropre de première espèce	27
3. Convergence des intégrales impropres de première espèce	28
4. Convergence absolue et la semi-convergence	30
VII - TD 2	32
1. Exercice : 1	32
2. Exercice : 2	32
3. Exercice : 3	32
4. Exercice : 4	33
VIII - Test Final	34
Solutions des exercices	36
Références	43
Bibliographie	44
Webographie	45

Objectifs

L'objectif principal de ce cours est de développer des compétences et des techniques qui permettront aux étudiants de :

- **Maîtriser** les outils d'intégration avancée
- **Résoudre** des équations différentielles
- **Analyser** les séries et leurs applications
- **Utiliser** les transformations de Laplace et de Fourier
- **Appliquer** les méthodes mathématiques à la chimie

Ce module vise à fournir aux étudiants de licence en chimie les outils mathématiques nécessaires pour aborder des défis complexes dans leur domaine, en facilitant la modélisation et l'analyse des phénomènes chimiques avec des approches rigoureuses et adaptées.

Fiche-contact

I

1. Présentation de l'enseignant :

- Enseignant de la matière : **Abderraouf Bouchelaghem**
- **Contacts** : *abderraouf.bouchelaghem@univ-setif.dz*

2. Informations administratives :

- Coefficient : **02**
- Crédits : **04**
- Volume horaire global : **45Heures**
- Volume horaire de travail requis/semaine : **3h**

3. Modalité d'évaluation : **33% Continu+ 67% Examen**

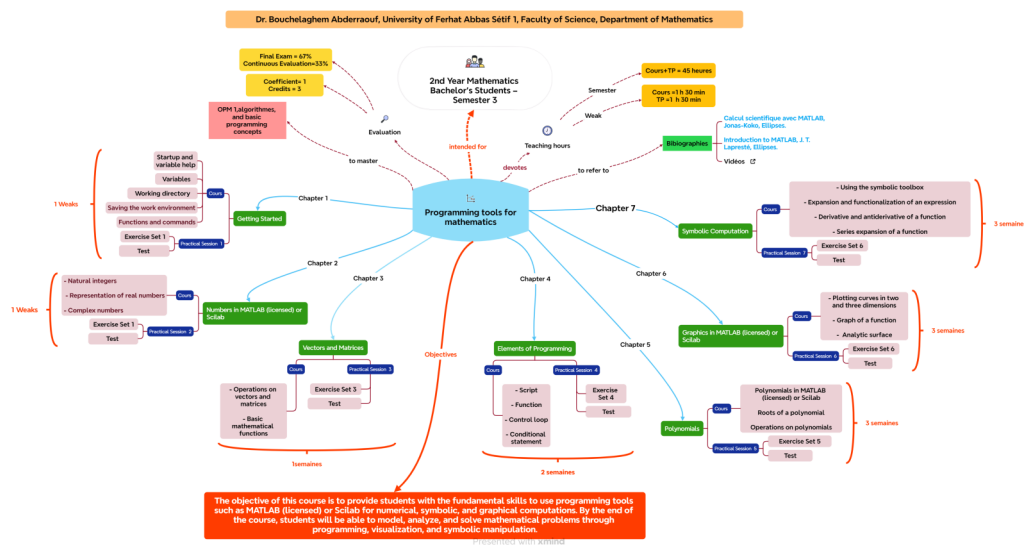
4. Modalité de suivi (calendrier du tutorat) : **Département de Chimie, Faculté des sciences, Université Ferhat Abbas Sétif 1.**

Préface

II

Ce cours est un cours de niveau Licence désigné aux étudiants de deuxième année Licence chimie, (régime L.M. D, Licence-Master-Doctorat) conformément au programme officiel du module Mathématiques appliquées .

Ces notes de cours sont issues de l'enseignement du module de Mathématiques appliquées durant ces années au niveau du département de Chimie, Faculté des sciences, Université Sétif 1.



Pré-requis

III

1. Pré-requis

Pour pouvoir suivre ce cours avec succès il faut au préalable avoir :

- **Fonctions usuelles** : polynômes, exponentielle, logarithme, trigonométriques.
- **Dérivation** :
 - Dérivées de fonctions réelles d'une variable réelle.
 - Règles de dérivation (produit, quotient, composée).
- **Intégration** (Rappels de L1) :
 - Intégrale de Riemann sur un intervalle borné.
 - Calcul de primitives de fonctions usuelles.
 - Techniques d'intégration : par parties, changement de variable.

2. Test des pré-requis

Exercice

Exercice

Quelle est une primitive de $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x}$

- ☐ $x^3 + \ln |x| + C$
- ☐ $x^3 - \ln |x| + C$
- ☐ $x^3 - x^{-1} + C$
- ☐ $3x^3 - \ln |x| + C$

Exercice

Calculer $\int_1^2 (2x + 1) dx$

- ☐ 4
- ☐ 5
- ☐ 6

○ 7

Exercice

Quelle technique est la plus appropriée pour calculer $\int x \ln x \, dx$

- ☐ Changement de variable
- ☐ Intégration par parties
- ☐ Intégration directe
- ☐ Intégrale impropre

Exercise

Dans $\int x \cos(x^2) dx$, quel changement de variable convient ?

- ☐ $u = \cos x$
- ☐ $u = \sin x$
- ☐ $u = x$
- ☐ $u = x^2$

Exercise

Dérivée partielle de $f(x, y) = x^2y + y^3$ par rapport à x

- ☐ $2xy + y^2$
- ☐ $2x + y$
- ☐ $2xy$
- ☐ y^3

Exercise

Quelle est la limite de $\frac{1}{x}$ quand $x \rightarrow +\infty$

- ☐ 1
- ☐ 0
- ☐ $+\infty$
- ☐ n'existe pas

Exercice

Calculez l'intégrale suivante : $\int_0^1 (3x^2 + 2) dx$

Intégrales simples et multiples

IV

1. Objectifs

À l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- **Définir** l'intégrale de Riemann pour des fonctions d'une variable réelle.
- **Calculer** des primitives de fonctions usuelles.
- **Formuler** et **interpréter** des intégrales doubles et triples.
- **Appliquer** les intégrales multiples au calcul d'aires, de volumes et d'autres grandeurs géométriques.
- **Utiliser** les changements d'ordres d'intégration pour simplifier des calculs dans des domaines simples.
- **Analyser** des situations géométriques pour modéliser des problèmes à l'aide d'intégrales doubles ou triple

2. Rappels sur l'intégrale de Riemann et sur le calcul de primitives

2.1. Intégrale de Riemann

Définition : Subdivision

Soit $[a, b]$ un intervalle fini, on appelle subdivision S de $[a, b]$ toute suite finie ordonnée $(t_i)_{0 \leq i \leq n}$ de $[a, b]$:

$$a = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n = b.$$

On appelle "**pas**" de la subdivision, le réel qu'on note par $\rho(S)$ défini par

$$\rho(S) = \max_{0 \leq i \leq n-1} |t_{i+1} - t_i|.$$

Exemple

- Dans cet exemple, nous donnons quelques subdivisions de l'intervalle $[0, 1]$.

$$S_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \quad S_2 = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right\},$$

$$S_3 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right\}, \quad S_4 = \left\{0, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, 1\right\}.$$

sont des subdivisions de $[0, 1]$.

- La subdivision uniforme sur $[a, b]$ est celle de points $t_i = a + i \frac{b-a}{n}$, $0 \leq i \leq n$, elle est de pas $\frac{b-a}{n}$.

- Précédemment, S_1, S_2, S_3 sont uniformes de pas respectivement

$$\rho(S_1) = \frac{1}{2}, \quad \rho(S_2) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \rho(S_3) = \frac{1}{3}.$$

Par contre, S_4 n'est pas uniforme et de pas $\rho(S_4) = \frac{2}{5}$.

Exemple : (Subdivision de l'intervalle $[a, b]$)

Dans le cas où $I = [a, b]$, on peut considérer la subdivision uniforme suivante :

$$x_0 = a < x_1 = a + \frac{b-a}{n} < x_2 = a + 2 \frac{b-a}{n} < x_3 = a + 3 \frac{b-a}{n} < \dots < x_k = a + k \frac{b-a}{n} < \dots < x_n = b.$$

c'est une subdivision uniforme de I dont le pas est $\rho(S) = \frac{1}{n}$.

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On considère une subdivision S de $[a, b]$ qu'on note :

$S = \{x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$. On pose pour $i = 1, 2, \dots, n$,

$$m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \quad \text{et} \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

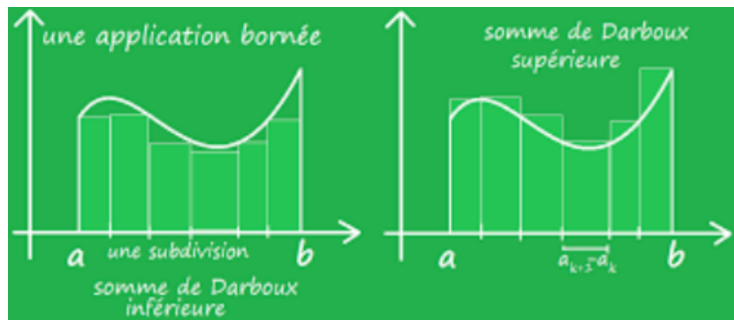
Définition : Sommes de Darboux

On appelle somme de Darboux **inférieure** associée à f et σ le nombre

$$S_{[a,b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}).$$

La somme de Darboux **supérieure** associée à f et σ est le nombre

$$S_{[a,b]}(f, \sigma) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}).$$



Sommes de Darboux

Définition : Fonction intégrable au sens de Riemann

Soit f une fonction bornée sur $[a, b]$. On dit que f est intégrable au sens de Riemann (ou Riemann intégrable sur $[a, b]$) si

$$s_{[a,b]}(f) = S_{[a,b]}(f).$$

On note alors ce nombre par $\int_a^b f(t) dt$ et il est donc l'intégrale de f sur l'intervalle $[a, b]$.

2.2. Propriétés de l'intégral de Riemann

Soient f et g deux fonctions, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a, b, c \in \mathbb{R} (a \leq c \leq b)$ on a :

1. Si la fonction f est intégrable sur les intervalles $[a, c]$ et $[c, b]$, elle est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et on a

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

2. Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $f \geq 0$, alors

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0$$

3. Si la fonction f est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction λf est intégrable sur l'intervalle $[a, b]$

$$\int_a^b \lambda f(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx$$

4. Si les fonctions f et g sont intégrables sur l'intervalle $[a, b]$,

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

2.3. Calcul des primitives

2.3.1. Calcul des primitives

Définition

Soit f une fonction continue sur I . On dit que $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I ssi la dérivée de F donne f ($F' = f$). On prend alors l'habitude de noter toute primitive de f sous forme

$$F(x) = \int f(x) dx$$

et s'appelle aussi intégrale indéfinie de f .

Remarque

La primitive d'une fonction s'il existe n'a pas unique.

Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$. Alors $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x) = \frac{x^2}{2}$ est une primitive de f , aussi la fonction définie par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2$ est une primitive de f .

2.3.2. Primitives usuelles

Rappel

On rappelle les dérivées des fonctions usuelles ainsi que les formules générales de dérivation.

La fonction f	La primitive de f définie par: ($k \in \mathbb{R}^n$)
$c \in \mathbb{R}$	$cx + k$
$x^\alpha, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha + 1} x^{\alpha+1} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + k$
e^x	$e^x + k$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + k$
$\cos(x)$	$\sin(x) + k$
$ch(x)$	$sh(x) + k$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctg(x) + k$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + k$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsh}(x) + k = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + k$

Exemple

Calculer l'intégrale suivante $I = \int (3x^2 + e^{-x} - \cos 2x) dx$.

On a

$$\begin{aligned}
 I &= \int 3x^2 dx + \int e^{-x} dx - \int \cos 2x dx \\
 &= 3 \int x^2 dx - \int -e^{-x} dx - \frac{1}{2} \int 2 \cos 2x dx \\
 &= x^3 - e^{-x} - \frac{1}{2} \sin 2x + k
 \end{aligned}$$

2.3.3. Intégrale par partie

Méthode

Soient u et v deux fonctions dérivables. On a

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

On a $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ alors

$$\int (u(x)v(x))' dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$$

donc $u(x)v(x) = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$ c'est à dire

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

Exemple

calculons $\int x^2 e^x dx$

On a

$$\begin{aligned} - \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx = \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \\ - \int x e^x dx &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x \end{aligned}$$

alors

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

2.3.4. Changement de variables

Méthode

Soient u une fonction dérivable et f une fonction continue avec $F(x) = \int f(x)dx$

On a

$$\int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u)$$

Exemple

Calculons la primitive

$$K(x) = \int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx.$$

on choisit $u(x) = \cos x$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $u'(x) = -\sin x$, $F(x) = \ln |x| + c$, $c \in \mathbb{R}$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int u' f(u) dx = \int f(u) du = F(u) = -\ln |\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$K(x) = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln |\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

3. Intégrale double

3.1. Intégrale double

Définition

Soit $z = F(x, y)$ une fonction définie dans un domaine D fermé et borné du plan xOy . Décomposons le domaine D d'une façon arbitraire en n domaines élémentaires de surfaces $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$. Choisissons maintenant dans chaque domaine élémentaire un point arbitraire $(P_k)_{1 \leq k \leq n}$. Soient $F(P_1), F(P_2), \dots, F(P_n)$ les valeurs de la fonction $F(x, y)$ en ces points, et formons ensuite les produits $F(P_k)\Delta s_k$.

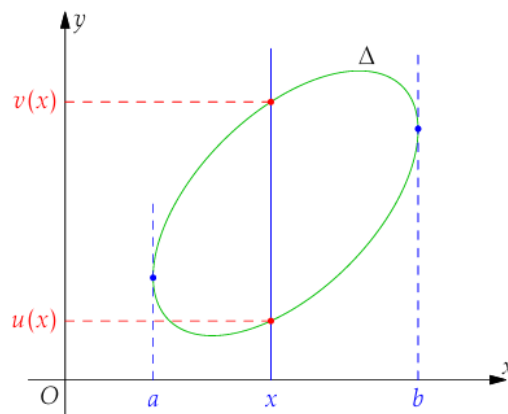
On appelle somme intégrale de la fonction $F(x, y)$ dans le domaine D une somme de la forme

$$\sum_{k=1}^n F(P_k)\Delta s_k = F(P_1)\Delta s_1 + F(P_2)\Delta s_2 + \dots + F(P_n)\Delta s_n.$$

On appelle intégrale double de la fonction $F(x, y)$ sur le domaine D la limite de la somme intégrale quand le plus grand des domaines $\Delta s_k \rightarrow 0$.

On note

$$\iint_D F(x, y) dx dy = \iint_D F(P) ds = \lim_{\max \Delta s_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(P_k)\Delta s_k.$$



Intégrale double

Remarque

Pour une fonction continue dans le domaine fermé D , cette limite existe et ne dépend ni du mode de partitionnement du domaine D en élément ni du choix des points P_k

3.2. Propriétés des intégrales doubles

Si $f(x, y)$ et $g(x, y)$ sont deux fonctions continues sur le domaine $D = D_1 \cup D_2$ de $\mathbb{R}^2$

avec $(D_1 \cap D_2 = \emptyset)$, nous avons alors

1. $\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dy dx = \iint_D f(x, y) dy dx + \iint_D g(x, y) dy dx.$
2. $\iint_D \lambda f(x, y) dy dx = \lambda \iint_D f(x, y) dy dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$
3. $\iint_D f(x, y) dy dx = \iint_{D_1} f(x, y) dy dx + \iint_{D_2} f(x, y) dy dx.$
4. Si $f(x, y) \leq g(x, y) \Rightarrow \iint_D f(x, y) dy dx \leq \iint_D g(x, y) dy dx.$



3.3. Calcul des intégrales doubles

3.3.1. Théorème de Fubini

Fondamental : Théorème de Fubini

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Cas où $D = [a, b] \times [c, d]$, $a \leq b$ et $c \leq d$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy.$$

2. Cas où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, u(x) \leq y \leq v(x)\}$, où $u, v : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, alors :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{u(x)}^{v(x)} f(x, y) dy \right] dx.$$

Complément

Si $f(x, y) = g(x)h(y)$ avec $D = [a, b] \times [c, d]$, on a :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right].$$

Exemple

On calcule $I = \iint_D (xy) dx dy$, où $D = [1, 2] \times [3, 5]$.

$$I = \left[\int_1^2 x dx \right] \times \left[\int_3^5 y dy \right] = \frac{3}{2} \times \frac{16}{2} = 12.$$

Exemple

On calcule $I = \iint_D dx dy$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x\}$.

$$\iint_D dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} dy \right] dx = \int_0^1 (1 - x) dx = \frac{1}{2}.$$

3.3.2. Changement de variable

Fondamental

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et

$$\varphi : U \rightarrow V$$

$$(u, v) \rightarrow (x, y)$$

une application de classe C^1 , et $\Delta \subset U$ et $D \subset V$

La matrice jacobienne de φ est $J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$ et $\det(J(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(\varphi(u, v)) \det(j(\varphi)) du dv$$

3.3.3. Coordonnées polaires

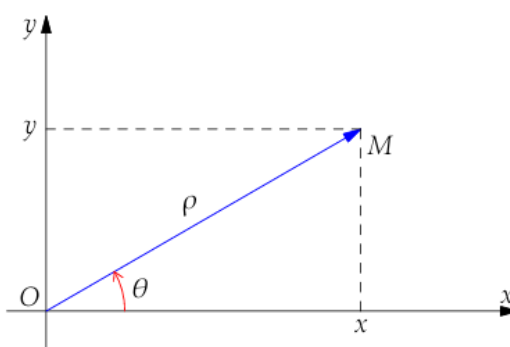
 Fondamental

$$\varphi : (r, \theta) \rightarrow (x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

La matrice jacobienne de φ est $\frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$

et $\left| \frac{D(x, y)}{D(r, \theta)} \right| = r$. Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta) |r| dr d\theta$$



coordonnées polaires

 Exemple

On calcule

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$$

où $D = \{(x, y) / x^2 + y^2 \leq 1\}$

donc $\Delta = \{(r, \theta) / 0 \leq r \leq 1 \text{ et } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

$$I = \iint_D \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \iint_{\Delta} \frac{r}{1 + r^2} dr d\theta = \pi \ln 2$$

3.4. Application au calcul des aires

 Définition

L'aire d'une figure plane limitée par le domaine D se calcule par la formule

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D dx dy.$$

 Exemple

Calculer l'aire de la figure limitée par les courbes $y = x$ et $y = 2 - x^2$.

On détermine d'abord les coordonnées des points d'intersection de ces courbes, en résolvant le système :

$y = x$ et $y = 2 - x^2$, c-à-d, $x^2 + x - 2 = 0$. Par suite, on obtient $a(-2, -2)$ et $b(1, 1)$, d'où $-2 \leq x \leq 1$ et $x \leq y \leq 2 - x^2$.

On a

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(D) &= \int_{-2}^1 dx \int_x^{2-x^2} dy \\ &= \int_{-2}^1 (y) \Big|_x^{2-x^2} dx \\ &= \int_{-2}^1 (2 - x^2 - x) dx \\ &= \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_{-2}^1 \\ &= \frac{9}{2} u^2.\end{aligned}$$

(u : unité de surface)

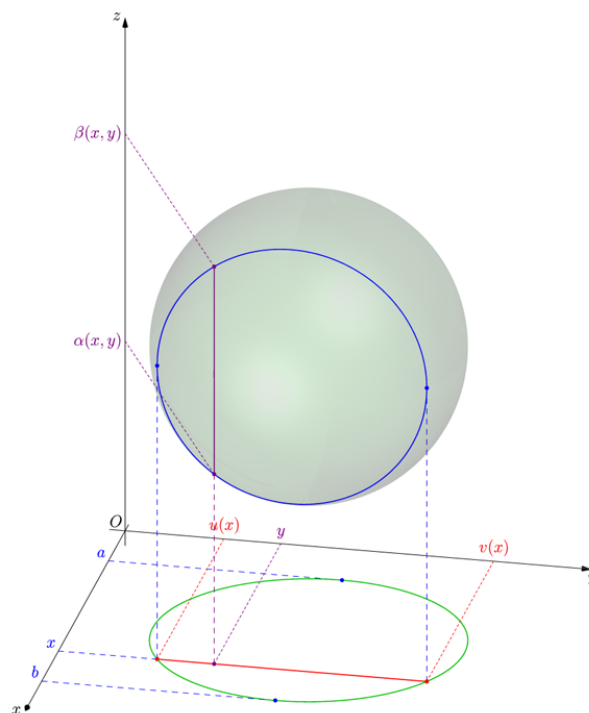
4. Intégrales triples

On va réaliser une étude de l'intégrale triple par analogie avec celle de l'intégrale double. **Les définitions de l'intégrale triple sont semblables aux définitions de l'intégrale double.** Le vocabulaire est identique **il suffit de remplacer $\mathbb{R}^2$ par $\mathbb{R}^3$, et on parlera de volume au lieu de surface.**

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$

L'intégrale sur D de $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, s'appelle une **intégrale triple**, on la note

$$\iiint_D f = \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz.$$



Intégrale triple

4.1. Propriétés des intégrales triples

Si $f(x, y, z)$ et $g(x, y, z)$ sont **deux fonctions continues sur le domaine** $D = D_1 \cup D_2$ de $\mathbb{R}^3$ avec $(D_1 \cap D_2 = \emptyset)$, nous avons alors

1. $\iiint_D [f(x, y, z) + g(x, y, z)] dz dy dx = \iiint_D f(x, y, z) dz dy dx + \iiint_D g(x, y, z) dz dy dx$
2. $\iiint_D \lambda f(x, y, z) dz dy dx = \lambda \iiint_D f(x, y, z) dz dy dx, \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$
3. $\iiint_D f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_{D_1} f(x, y, z) dz dy dx + \iiint_{D_2} f(x, y, z) dz dy dx.$
4. Si $f(x, y, z) \leq g(x, y, z) \Rightarrow \iiint_D f(x, y, z) dz dy dx \leq \iiint_D g(x, y, z) dz dy dx.$

4.2. Calcul des intégrales triples

4.2.1. Théorème de Fubini

Fondamental : Théorème de Fubini

Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Cas où $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\int_c^d \left[\int_s^t f(x, y, z) dz \right] dy \right] dx.$$

2. Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \Delta, u(x, y) \leq z \leq v(x, y)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, D est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\Delta} \left[\int_{u(x,y)}^{v(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

3. Cas où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; a \leq z \leq b, (x, y) \in \Delta(z)\}$, où $u, v : D \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues, $D(z)$ est un ensemble fermé borné de $\mathbb{R}^2, \forall z \in [a, b]$, alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b \left[\iint_{\Delta(z)} f(x, y, z) dx dy \right] dz.$$

Fondamental

Si $f(x, y, z) = g(x)h(y)k(z)$ avec $D = [a, b] \times [c, d] \times [s, t]$, $a \leq b$, $c \leq d$ et $s \leq t$, on a :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \times \left[\int_c^d h(y) dy \right] \times \left[\int_s^t k(z) dz \right].$$

Exemple

On calcule $\iiint_D (xyz) dx dy dz$, $D = [0, 1]^3$

$$\iiint_D (xyz) dx dy dz = \left[\int_0^1 x dx \right] \times \left[\int_0^1 y dy \right] \times \left[\int_0^1 z dz \right] = \frac{1}{8}.$$

Exemple

On calcule $\iiint_{\Delta} dx dy dz$, $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (x, y) \in D = [0, 1]^2, 0 \leq z \leq x\}$

$$\begin{aligned} \iiint_{\Delta} dx dy dz &= \iint_D \left[\int_x^y dz \right] dx dy \\ &= \iint_D x dx dy \\ &= \left[\int_0^1 x dx \right] \times \left[\int_0^1 dy \right] \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4.2.2. Changement de variable

 Méthode

Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^3$ et

$$\varphi : U \rightarrow V$$

$$(u, v, w) \rightarrow (x, y, z)$$

une application de classe C^1 , et $\Delta \subset U$ et $D \subset V$. La matrice jacobienne de φ est $J(\varphi)$:

$$J(\varphi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}, \text{ et } \det(J(\varphi)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Si $\varphi(\Delta) = D$, on obtient :

$$\iiint_D f(x, y, w) dx dy dw = \iiint_{\Delta} f(\varphi(u, v, w)) |\det(J(\varphi))| du dv dw.$$

4.2.3. Coordonnées cylindriques

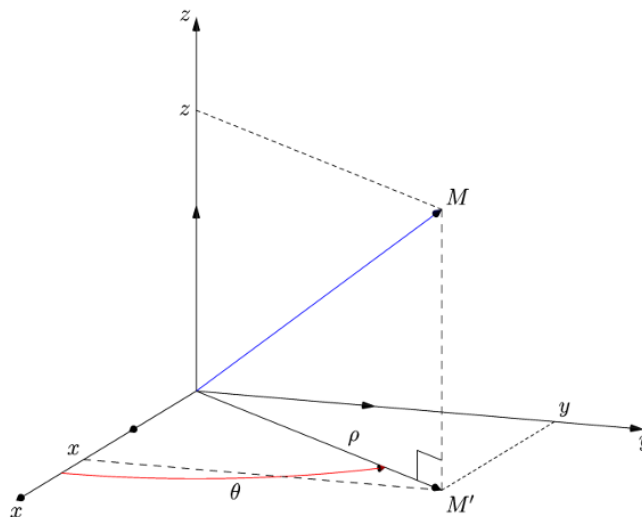
 Méthode

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, z) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$$

La matrice jacobienne de φ est $J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $\det(J(\varphi)) = r$.

Si $\varphi(\Delta) = D$, la formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) |\det(J(\varphi))| dr d\theta dz$$



Coordonnées cylindriques

Exemple

$\iiint_D dx dy dz$, avec $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 2\}$

$\Delta = \{(r, \theta, z) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq 2\}$

$$\begin{aligned} \iiint_D dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz \\ &= \left[\int_0^1 r dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_0^2 dz \right] \\ &= \frac{1}{2} \times 2\pi \times 2 = 2\pi. \end{aligned}$$

4.2.4. Coordonnées sphériques

Méthode

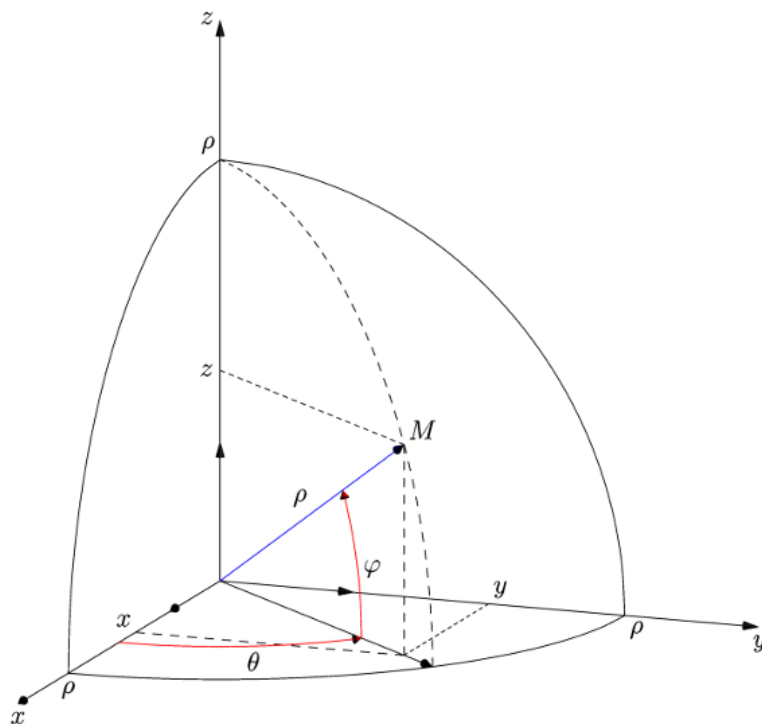
$\varphi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (r, \theta, \beta) \rightarrow (x, y, z) = (r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta)$

La matrice jacobienne de φ est $J(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \cos \beta & -r \cos \theta \sin \beta \\ \sin \theta \cos \beta & r \cos \theta \cos \beta & -r \sin \theta \sin \beta \\ \sin \beta & 0 & r \cos \beta \end{pmatrix}$, et

$$\det(J(\varphi)) = r^2 \cos \beta$$

La formule du changement de variables s'écrit alors :

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\Delta} f(r \cos \theta \cos \beta, r \sin \theta \cos \beta, r \sin \beta) r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta$$



Coordonnées sphériques

Exemple

On calcule $\iiint_D dx dy dz$, $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

$$\text{donc } \Delta = \{(r, \theta, \beta) | 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\frac{\pi}{2} \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

$$\begin{aligned} \iiint_D f(x, y, z) dx dy dz &= \iiint_{\Delta} r^2 |\cos \beta| dr d\theta d\beta \\ &= \left[\int_0^1 r^2 dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta d\beta \right] \\ &= \frac{4}{3}\pi. \end{aligned}$$

4.3. Application au calcul des volumes

Définition

Le volume d'un corps qui occupe le domaine D est donné par la formule

$$V = \iiint_D dx dy dz.$$

Exemple

Calculons le volume du cylindre de rayon a et l'hauteur h

$$\iiint_D dx dy dz, \quad D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\Delta = \{(r, \theta, z) \mid 0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq z \leq h\}$$

$$\iiint_D dx dy dz = \iiint_{\Delta} r dr d\theta dz = \left[\int_0^a r dr \right] \times \left[\int_0^{2\pi} d\theta \right] \times \left[\int_0^h dz \right] = \frac{a^2}{2} 2\pi h = a^2 \pi h.$$

4.4.

Exercice :

Question

[solution n°1 p.36]

Calculer le volume du corps limité par les surfaces $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $z = x^2 + y^2$

TD 1

V

1. Exercice : 1

Question

[solution n°2 p.36]

Calculer les intégrales doubles suivantes

1. $I_1 = \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^3}$, où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1, y \geq 1, x+y \leq 3\}$,
2. $I_2 = \iint_D \cos(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$ où $D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x^2 + y^2 \leq \frac{\pi^2}{4} \right\}$
3. $I_3 = \iint_D \sin(x+y) dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0; y \geq 0 \text{ et } x+y \leq \pi\}$.

Indice :

Pour I_2 utiliser les coordonnées polaires, et dans I_3 Poser $u = x$ et $v = x + y$.

2. Exercice : 2

Question

[solution n°3 p.37]

Calculer les intégrales triples suivantes :

1. $J_1 = \iiint_D (x+y+z) dx dy dz$, où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < y\}$.
2. $J_2 = \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ où $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

Indice :

Pour J_2 utiliser les coordonnées sphériques

3. Exercice : 3

Question

[solution n°4 p.38]

Calculer l'aire du domaine D limité par les courbes :

1. $y = 2 - x^2$ et $y = x$,
2. $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.

4. Exercice : 4

Question

[solution n°5 p.38]

Soit V le volume défini par $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

1. Calculer le volume de V .
2. Calculer $\iiint_V x^2 dx dy dz$.

Intégrale impropres

VI

Les intégrales jusqu'ici ont été définies sur des intervalles fermés et bornés de $\mathbb{R}$, dont la fonction doit être au moins continue par morceaux. Cependant plusieurs applications conduisent à considérer assez souvent des intervalles non bornés où la fonction f à intégrer est discontinue pour des valeurs isolées de la variable x comprises dans les limites d'intégration. Pour couvrir ces cas, la notion d'intégrale, que ce soit de Riemann, doit être étendue à l'aide des limites. Cette appellation est dite intégrale impropre ou généralisée

1. Objectifs

À l'issue de ce chapitre, l'apprenant sera capable de :

- **Identifier** les types d'intégrales impropres
- **Déterminer** la convergence ou la divergence d'une intégrale impropre
- **Calculer** les intégrales impropres
- **Utiliser** des critères de convergence
- **Manipuler** les cas particuliers d'intégrales impropres

2. Intégrale impropre de première espèce

Définition

Soit $f(x)$ une fonction bornée et intégrable sur tout intervalle fini $[a, b]$. Alors, par définition

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

L'intégrale du membre de gauche de l'égalité est dite **convergente ou divergente selon que la limite de droite existe ou n'existe pas**.

De même par définition

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Exemple

L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ est **convergente**, cependant l'intégrale $\int_{-\infty}^0 \cos x dx$ est **divergente**. En effet,

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}) \Big|_0^b = 1 + \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-b}) = 1.$$

-

$$\int_{-\infty}^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \cos x \, dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} (\sin x) \Big|_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \sin a \text{ n'existe pas.}$$

Remarque

D'une manière analogue, on définit aussi

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, dx &= \int_{-\infty}^{x_0} f(x) \, dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x) \, dx \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^{x_0} f(x) \, dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^b f(x) \, dx. \end{aligned}$$

Exemple

Étudier l'intégrale de première espèce suivante : $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

On applique la remarque précédente dont $x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan x) \Big|_a^0 + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan x) \Big|_0^b \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (\arctan 0 - \arctan a) + \lim_{b \rightarrow +\infty} (\arctan b - \arctan 0) \\ &= -\left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$

L'intégrale donc est **converge**.

3. Convergence des intégrales impropres de première espèce

Définition : Intégrale de puissance ou de Riemann

Toute intégrale de la forme

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$$

où α est une constante et $a > 0$ est appelée **intégrale de puissance**, tels que elle **converge** si $\alpha > 1$ et elle **diverge** pour $\alpha \leq 1$.

Exemple

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^3 + x - 1} \, dx$ est convergente car pour $x \rightarrow +\infty$, on a

$$\frac{x}{x^3 + x - 1} \simeq \frac{1}{x^2} \text{ et } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} \text{ est convergente où } \alpha = 2 > 1.$$

Fondamental : Critères de comparaison pour les fonctions positives

Soient f et g deux fonctions intégrables sur tout intervalle fini $[a, b]$ vérifiant $0 \leq f \leq g$. Alors

1. $\int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ est convergente $\implies \int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ est convergente.
2. $\int_a^{+\infty} f(x) \, dx$ est divergente $\implies \int_a^{+\infty} g(x) \, dx$ est divergente.

 Exemple

1. L'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$ **est convergente** puisque pour $x \geq 1$, on a

$$x^2 \leq e^{x^2} \text{ d'où } e^{-x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

mais l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est de puissance qui converge.

Selon le critère de comparaison notre intégrale donc est convergente.

2. L'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx$ **est divergente** car si $x \geq e$, on obtient

$$1 \leq \log x \text{ d'où } \frac{1}{x} \leq \frac{\log x}{x}$$

mais l'intégrale $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x}$ est de Riemann qui diverge.

D'après aussi le critère de comparaison l'intégrale $\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x} dx$ donc est divergente.

 Fondamental : Critère de quotient pour les fonctions positives

Soient f et g deux fonctions intégrables sur tout intervalle fini $[a, b]$, telle que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A \quad \textbf{existe}.$$

Alors,

1. Si $A \neq \{0, +\infty\} \implies \int_a^{+\infty} f(x) dx$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **ont la même nature**.
2. Si $A = 0$ et $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ **converge** $\implies \int_a^{+\infty} f(x) dx$ **converge**.
3. Si $A = +\infty$ et $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **diverge** $\implies \int_a^{+\infty} g(x) dx$ **diverge**.

 Exemple

Considérons l'intégrale suivante $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$. Comme l'intégrale de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ est convergente, on a

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}.$$

La première intégrale du membre droite est convergente puisque l'intervalle $[0, 1]$ est borné et aussi la fonction $\frac{1}{x^2 + 2x + 1}$ est bornée sur cet intervalle.

Pour la deuxième intégrale, il suffit de calculer

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2 + 2x + 1}}{\frac{1}{x^2}} = 1.$$

D'après le **critère de quotient**, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 1}$ est de même nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$.
L'intégrale considérée donc est **convergente**.

Remarque

Dans ce critère si on prend $g(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ nous arrivons au théorème important suivant

Fondamental

Si la fonction $f(x)$ est intégrable sur tout intervalle fini $[a, b]$, et la limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = A$ existe. Alors,

1. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **converge** pour $\alpha > 1$ et A finie.
2. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ **diverge** pour $\alpha \leq 1$ et $A \neq 0$ (peut être infinie).

Exemple

Soit l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x+3} dx$.

On prend $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x+3}$ et nous choisissons $\alpha = \frac{1}{2}$, il vient que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x}}{x+3} = 1.$$

L'intégrale donc est divergente car $\alpha = \frac{1}{2} \leq 1$ et $A = 1 \neq 0$.

4. Convergence absolue et la semi-convergence

Définition

Soit f une fonction intégrable sur tout intervalle fini $[a, b]$.

1. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ est **convergente**.
2. Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est **convergente** mais l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ est **divergente**, alors $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ est dite **semi-convergente**.

Fondamental

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

Exemple

L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x \sqrt{x+1}} dx$ est absolument convergente. En effet, pour tout $x \geq 1$ on a

$$\left| \frac{\sin x}{x \sqrt{x+1}} \right| \leq \frac{1}{x \sqrt{x+1}}$$

d'où

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x \sqrt{x+1}} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx,$$

mais l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{x+1}} dx$ est convergente puisque à l'aide du dernier théorème, on obtient

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x \sqrt{x+1}} = 1,$$

et d'après le critère de comparaison, il vient que $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x \sqrt{x+1}} \right| dx$ est convergente.

Fondamental : Règle d'Abel

Soient f et g deux fonctions intégrables sur tout intervalle fini $[a, b]$ qui vérifiant

1. La fonction $f(x)$ est **monotone** et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. $\exists M > 0$ tel que $\forall t \in [a, +\infty[; \left| \int_a^t g(x) dx \right| \leq M$. Alors, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ est **convergente**.

Exemple

Considérons l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx$.

Si on prend $f(x) = e^{-x^2}$ et $g(x) = \cos x$:

1. $f'(x) = -2xe^{-x^2} \leq 0$ pour $x \geq 0$, et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0$.
2. $\int_0^t \cos x dx = (\sin x) \Big|_0^t = \sin t$ d'où $\left| \int_0^t \cos x dx \right| = |\sin t| \leq 1$.

Finalement, les conditions du théorème sont satisfaites et donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos x dx$ est convergente.

TD 2

VII

1. Exercice : 1

Question

[solution n°6 p.39]

Déterminer la nature des intégrales impropres suivantes

1. $I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx,$
2. $I_2 = \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} dx;$
3. $I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x} dx$
4. $I_4 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx,$

2. Exercice : 2

Question

[solution n°7 p.40]

Montrer la convergence de l'intégrale suivante :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^3 + 1} dt$$

3. Exercice : 3

Question

[solution n°8 p.40]

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$
2. $\int_0^1 \frac{1}{t \sin t} dt$

4. Exercice : 4

Question

[solution n°9 p.40]

Montrer que les intégrales suivantes

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx, \quad I_2 = \int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$$

sont absolument convergentes.

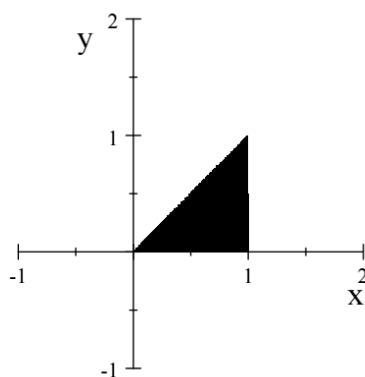
Test Final

VIII

Exercice

[solution n°10 p.40]

Calcul de $\int_D \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq x \leq 1\}$.



ex1

Exercice

[solution n°11 p.41]

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y) dx dy$.

Exercice

[solution n°12 p.41]

Calculer l'intégrale suivante $\iiint_V (x - y + 2z) dx dy dz$

où le domaine

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, \text{ et } 2 \leq z \leq 3\}.$$

- ☐ 1.5
- ☐ 12
- ☐ 21

Exercice

[solution n°13 p.41]

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

- ☐ Vrais
- ☐ Faux

Exercice

[solution n°14 p.41]

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(x)dx$ est convergente ou divergente ?

- ☐ Convergente
- ☐ Divergente

Exercice

[solution n°15 p.42]

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente ou divergente ?

- ☐ Convergente
- ☐ Divergente

Solutions des exercices



> Solution n°1

Exercice p. 25

L'intersection de les deux surfaces est pour

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2$$

$$\text{d'où } x^2 + y^2 = 1 \text{ ou } x^2 + y^2 = 0,$$

donc se rencontrent en : point $(0, 0, 0)$ et la surface $x^2 + y^2 = 1$ avec $z = 1$, il vient

$$x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Donc le volume V de ce corps

$$V = \iint_T \left[\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} dz \right] dx dy,$$

où le domaine $T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est la projection orthogonale du corps sur le plan (xOy) .

Passons maintenant aux coordonnées cylindriques, il vient que

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 \left(\int_{r^2}^r dz \right) r dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^1 (r - r^3) dr \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^1 d\theta \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

> Solution n°2

Exercice p. 26

1. Méthode directe

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2} \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 \frac{dx}{(x+y)^2} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 \left[-\frac{1}{2(1+y)} + \frac{1}{y} \right] dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{y} - \frac{1}{2(1+y)} \right] dy \\ &= \left[\ln y - \frac{1}{2} \ln(1+y) \right]_0^1 \\ &= \left[\ln 1 - \frac{1}{2} \ln 2 \right] - \left[\lim_{y \rightarrow 0} \left(\ln y - \frac{1}{2} \ln(1+y) \right) \right] \end{aligned}$$

2. On utilise les coordonnées polaires (r, θ) tel que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & r > 0, & \theta \in [0, 2\pi], \\ y = r \sin \theta, \end{cases} \quad \text{on a} \quad dxdy = |J| dr d\theta \quad \text{tel que}$$

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

$$\text{donc } dxdy = r dr d\theta,$$

3. Poser

donc

$$u = x \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$v = x + y \quad \dots\dots\dots(2)$$

après l'équation (1) on trouve $x = u$, on remplace x dans l'équation (2) on trouve $y = v - u$. Donc

où la matrice Jacobienne est donnée par :

On cherche

Sachant que $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y \leq \pi$, on obtient :

$$0 \leq y \Rightarrow 0 \leq v - u \Rightarrow u \leq v$$

Ainsi,

donc

> Solution n°3

Exercice p. 26

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_D (x+y+z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left[\int_0^{1-x-y} (x+y+z) \, dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(xy + yz + \frac{z^2}{2} \right) \Big|_0^{1-x-y} dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^{1-x} \left(xy + \frac{y(1-x-y)}{2} \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{6} \right]_0^{1-x} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^3}{6} \right] dx \\ &= \left[\frac{x^4}{8} + \frac{x^4}{8} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2. Tel que (r, θ, φ) sont les coordonnées sphériques

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, & r > 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi \in [0, \pi] \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \varphi \end{cases}$$

on a $dx dy = |J| dr d\theta d\varphi = r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi$, où $|J|$ est le déterminant de la matrice Jacobien

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \implies r \leq 1 \quad \text{alors} \quad D = [0, 1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$\begin{aligned} J_2 &= \iiint_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \iiint_D \frac{r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi}{\sqrt{r^2}} \\ &= \iiint_D \frac{r^2 \sin \varphi dr d\theta d\varphi}{r} = \int_0^1 r dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi, \\ &= \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1 \times [\theta]_0^{2\pi} \times [-\cos \varphi]_0^\pi, \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

> Solution n°4

Exercice p. 26

1. Nous calculons la solution de l'équation $x^2 = x + 2 \implies x^2 - x - 2 = 0$
les racines $x_1 = -1$ et $x_2 = 2 \implies -1 \leq x \leq 2$ et $x^2 \leq y \leq x + 2$.

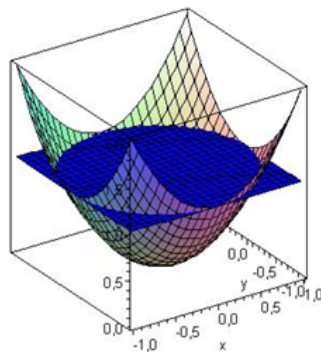
$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{D_1} &= \iint_{D_1} dx dy = \int_{-1}^2 \left| \int_{x^2}^{x+2} dy \right| dx \\ &= \int_{-1}^2 [y]_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x + 2 - x^2) dx \\ &= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

2. Nous calculons la solution de l'équation $x^2 = \sqrt{x}$
les racines $x_1 = 0$ et $x_2 = 1 \implies 0 \leq x \leq 1$ et $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{D_2} &= \iint_{D_2} dx dy = \int_0^1 \left| \int_{x^2}^{\sqrt{x}} dy \right| dx, \\ &= \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx, \\ &= \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1, \\ &= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

> Solution n°5

Exercice p. 26



Représentation de V

1. Le volume V est la région comprise à l'intérieur du paraboloïde d'équation : $z = x^2 + y^2$, sous le plan horizontal d'équation $z = 1$.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}.$$

On peut faire varier z de 0 à 1 et prendre (x, y) dans le disque de centre O et de rayon $\sqrt{z}$.

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, 0 \leq z \leq 1, (x, y) \in D_z\}.$$

$$D_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \leq z\} = \text{Disque}(O; R = \sqrt{z}).$$

Par **Fubini** on obtient :

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \left(\iint_{D_z} dx dy \right) dz \\ &= \int_0^1 \pi (\sqrt{z})^2 dz \\ &= \int_0^1 \pi z dz \\ &= \pi \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{D_z} x^2 dx dy \right) dz = \int_0^1 z \left(\iint_{D_z} x^2 dx dy \right) dz$$

$$\left(\iint_{D_z} x^2 dx dy \right) \text{ On va passer en coordonnées polaires.}$$

$$\iint_{D_z} x^2 dx dy = \int_0^{\sqrt{z}} \left(\int_0^{2\pi} (r \cos t)^2 dt \right) r dr = \frac{\pi z^2}{4}$$

$$\iiint_V x^2 dx dy dz = \int_0^1 z \left(\frac{\pi z^2}{4} \right) dz = \int_0^1 \frac{\pi z^3}{4} dz = \left[\frac{\pi z^4}{16} \right]_0^1 = \boxed{\frac{\pi}{16}}$$

> Solution n°6

Exercice p. 32

1. On pose

$$F(t) = \int_1^t \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t = \frac{-1}{t} - \left(\frac{-1}{1} \right) = \frac{-1}{t} + 1$$

$$\text{alors } \lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = 1$$

donc l'intégrale I_1 est convergente.

$$2. \text{ on pose } f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} \text{ et } g(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

alors

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3} dx \text{ et } I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

sont de la même nature. Donc l'intégrale I_2 est **convergente**.

3. On a

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx$$

par la méthode de l'intégration par parties, on trouve

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

donc

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x e^{-x} dx = -x e^{-x} - \int -e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

alors

$$F(t) = \int_0^t \frac{x}{e^x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_1^t = -t e^{-t} - e^{-t} + 1$$

$\lim_{t \rightarrow +\infty} F(t) = +1$, donc l'intégrale I_3 est convergente.

4. Soit $f(t) = \frac{1}{t}$. Elle est définie et continue sur $[1, +\infty[$. En effet

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x \frac{1}{t} dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \ln 1) = +\infty.$$

Ainsi l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge

> Solution n°7

Exercice p. 32

$$\begin{aligned} I &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} dx \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{x+1} dx - \frac{1}{6} \int_0^t \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} dx \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} (\ln(t+1) - \ln(1)) - \frac{1}{6} (\ln(x^2-x+1))_0^t + \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right]_0^t \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln(t+1) - \frac{1}{6} \ln(t^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} - \arctan \frac{-1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{t+1}{t^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \frac{2t-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6} \right) \right] \\ &= 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

> Solution n°8

Exercice p. 32

1. Soit f la fonction de $[1, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $f(t) = \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right)$.

f est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$|f(t)| = \left| \frac{1}{t} \sin\left(\frac{1}{t}\right) \right| \leq \left| \frac{1}{t} \right| \cdot \left| \frac{1}{t} \right| = \frac{1}{t^2}.$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dx$ **converge**, donc $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ est **absolument convergente** et par suite elle **converge**.

2. Soit f la fonction de $]0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{1}{t \sin t}$.

f est continue et positive sur $]0, 1]$.

On a pour tout $t \in]0, 1]$, $f(t) \geq \frac{1}{t}$.

Or $\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ **diverge** et donc $\int_0^1 \frac{1}{t \sin t} dt$ **diverge** aussi.

> Solution n°9

Exercice p. 33

1. On montre que l'intégrale impropre

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} dx$$

est absolument convergente. On a

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x + 2 \cos x}{x^2} \right| dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^2} dx = 3 \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est **convergente**, donc I_1 est **absolument convergente**.

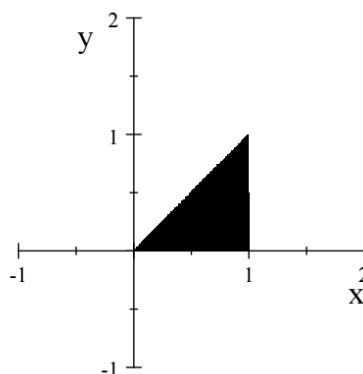
$$2. \text{ Car } 0 \leq \int_0^1 \frac{|\cos x|}{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

et $\int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 - 2\sqrt{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$, donc I_2 est **absolument convergente**.

> **Solution** n°10

Exercice p. 34

Calcul de $\int_D \frac{x}{\sqrt{y}} dx dy$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y \leq x \leq 1\}$.



ex1

0.8

> **Solution** n°11

Exercice p. 34

Calculer l'intégrale suivante : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\pi} \sin(x+y) + \cos(x-2y) dx dy$.

2

> **Solution** n°12

Exercice p. 34

Calculer l'intégrale suivante $\iiint_V (x - y + 2z) dx dy dz$

où le domaine

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 3, \text{ et } 2 \leq z \leq 3\}.$$

☐ 1.5☒ 12☐ 21> **Solution** n°13

Exercice p. 35

Toute intégrale absolument convergente est convergente.

☒ Vrais☐ Faux

> **Solution n°14**

Exercice p. 35

L'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \cos(x) dx$ est convergente ou divergente ?

☐ Convergente☒ Divergente> **Solution n°15**

Exercice p. 35

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ est convergente ou divergente ?

☒ Convergente☐ Divergente

Références

1

J. Lelong-Ferrand, J. M. Arnaudiès, Cours de mathématiques, tome 4, Edition Dunod, 1992.

2

A. El Kaabouci, D. Essayed, Mathématiques, Edition ellipses, 2013

Bibliographie



N. Piskounov, Calcul différentiel et intégral, tome 1, Editions Mir, Moscou, 1980.

Webographie

<https://www.bibmath.net/>

<http://exo7.emath.fr/>