Chapitre 2

Eléments de calcul fractionnaire

2.1 Intégrale de Rimann-Liouville

Fonctions définies sur $[a,b]$.

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a,b]$.
Notons par $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t\in[a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)(t)=\int_a^t f(\tau)\,d\tau$$

L'itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a. De plus, d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^2(t) &= \left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)\circ\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)=\int_a^t\left(\int_a^u f(\tau)\,d\tau\right)du\\ &= \int_a^t\left(\int_\tau^t du\right)f(\tau)\,d\tau\\ &= \int_a^t (t-\tau)\,f(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. En notant $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$ la nième itération de $\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)$, une récurrence directe montre que

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^t (t-\tau)^{n-1}f(\tau)\,d\tau.$$

Si on note $g=\left(\mathcal{I}_{a^+}^1 f\right)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall\ 0\le k\le n-1,\ g^{(k)}(a)=0,\ g^{(n)}=f$$

L'égalité $g^{(n)}=f$ justifie la définition suivante :

Définition 2.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f, que l'on note $\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)$, est définie par*

$$\left(\mathcal{I}_{a^+}^n f\right)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.
C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!$, $\forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 2.1.1 de la manière suivante :

Définition 2.1.2 *L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par*

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ de f, par

$$\forall t \in [a,b]\,;\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 2.1.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $\left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)$ et $\left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)$:

$$\begin{aligned} \forall t \ &\in\ \mathbb{R}^+;\ \left(\mathcal{I}_{0^+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \\ \forall t \ &\in\ \mathbb{R};\ \left(\mathcal{I}_{+}^\alpha f\right)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 2.1.1 *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $\left(\mathcal{I}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (t-a)^{\alpha+\beta-1}.$
2. $\left(\mathcal{I}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1}\right)(t) = \dfrac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} (b-t)^{\alpha+\beta-1}.$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}(t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-a)^{\beta-1}\,d\tau,\ \text{posons } \tau-a=s(t-a)\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 ((t-a)-s(t-a))^{\alpha-1}(s(t-a))^{\beta-1}(t-a)\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 s^{\beta-1}(1-s)^{\alpha-1}\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta),\ B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\\
&= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(t-a)^{\alpha+\beta-1}.
\end{aligned}$$

2. Même idée (le chengement de variable est $b-\tau=s(b-t)$). ■

Théorème 2.1.1 *Si $f\in L^1([a,b])$, alors $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f$ existe pour tout $\alpha>0$ et $\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\in L^1([a,b])$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $\alpha>0,\ \beta>0,$ et $f\in L^1([a,b])$. Alors*

$$\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f=\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}=\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}.$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\beta}f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_a^{\tau}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,ds\right)d\tau\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t\int_a^{\tau}(t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}f(s)\,dsd\tau,\ \left|\begin{array}{l}\text{changement de l'ordre}\\ \text{d'intégration}\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\beta-1}\,d\tau ds,\ \left|\begin{array}{l}u=\frac{\tau-s}{t-s},\ du=\frac{d\tau}{t-s}\\ \tau=(t-s)u+s,\ u:0\to 1\end{array}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\int_s^t (1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}duds,\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}B(\alpha,\beta)\,duds,\ \left|B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\right|\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t f(s)(t-s)^{\alpha+\beta-1}\,ds\\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1}f(s)\,ds\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{\alpha+\beta}f(t).
\end{aligned}$$

■

Lemme 2.1.1 *Soit* $\alpha > 0,\ f \in L^1([0,b]),\ b > 0.$
Alors la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ *est*

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) = s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s)$$

Preuve. On écrire l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f$ comme convolution de deux fonction $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$, C-à-d

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)\, d\tau \\ &= \left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right) * f(t) \\ &= g(t) * f(t) \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} f\right)(s) &= \mathcal{L}(g * f)(s) \\ &= \mathcal{L}(g)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}\right)(s) \times \mathcal{L}(f)(s) \\ &= s^{-\alpha}\mathcal{L}(f)(s). \end{aligned}$$

■

2.2 Dérivées fractionnaire

Il existe plusieurs définitions de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette parties les définitions de Riemann-Liouville, Liouville, Caputo ainsi que Grunwald-letnikov qui sont les plus utilisées.

2.2.1 Dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville

Si $\alpha > 0$, on note $[\alpha]$ la partie entière de α : $[\alpha]$ est l'unique entier vérifiant $[\alpha] \leq \alpha < [\alpha]+1$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^{\alpha}}{dt^{\alpha}} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$, on peut poser :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 2.2.1 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b]\,,\ \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.1 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.2 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in [a, b]\,,\ \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 2.2.3 d'intégrale à droite était associée à $-d/dt$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 2.2.4 *Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_-^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}_-^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (\tau - t)^{n-\alpha-1} f(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.2.1 *1. Pour* $\alpha = 0,\ n = 1.$*on a* $\mathcal{D}^0_{a^+} f(t) = \frac{d}{dt}\left(\mathcal{I}^1_{a^+} f\right) = f(t)$.

2. Toutes ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} \mathcal{D}^n_{a^+} f(t) = \mathcal{D}^n_{+} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}^n_{b^-} f(t) = \mathcal{D}^n_{-} f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}.$$

Proposition 2.2.1 *Pour* $\alpha \geq 0,\ \beta > 0,$ *on a*

$$\begin{aligned} 1.\ \left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} (t-a)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \\ 2.\ \left(\mathcal{D}^\alpha_{b^-} (b-t)^{\beta-1}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition 2.2.1 et proposition 2.1.1 on a

$$\left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{I}^{n-\alpha}_{a^+} f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1}\right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(n-\alpha+\beta-1-(n-1))(t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)..(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1)\Gamma(n-\alpha+\beta-1), \quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)\Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^\alpha_{a^+} f\right)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)(t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2)...(\beta-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.2 *Pour* $\lambda = \beta - 1,\ a = 0$ *on a*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\lambda}\right)(t) &= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\ldots(\lambda+1-\alpha)\, t^{\lambda-\alpha} \\ &= \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\ldots(1-(\alpha-\lambda))\, t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \tfrac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & si \quad \alpha-\lambda \notin \{1,2,...,n\} \\ 0, & si \quad \alpha-\lambda \in \{1,2,...,n\} \end{cases},\ \lambda > -1.\end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1,2,...,n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m,\ m \in \{1,2,...,n\}$ *C-à-d*

$$\left(\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m}\right)(t) = 0,\ m \in \{1,2,...,n\}$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 2.1.1 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.2.5 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $n = [\alpha] + 1$. *La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.6 *Soit* $\alpha > 0$, *et* $n = [\alpha] + 1$. *La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre* α *de* f *est définie par :*

$$\forall t \in [a,b],\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau)\, d\tau.$$

Remarque 2.2.3 *Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \begin{cases} {}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{n} f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{n} f(t) = (-1)^n \left(f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)\right) \end{cases}.$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.