Chapitre 1

Fonctions Spéciales

1.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.1.1 *On appelle fonction Gamma la fonction définie par*

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \ \left(z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0\right).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1)\ln t}$.

Exemple 1.1.1 *1.* $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.
2. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$. *(Posant le changement de variable* $t = \tau^2$*).*

Lemme 1.1.1 *La fonction Gamma est une fonction de classe* C^{∞} *sur* $\mathbb{R}_+^*$, *(resp. holomorphe sur le demi plan* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0$*) et*

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall z \in \mathbb{R}_+^* \ (\text{resp. } z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0); \ \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 1.1.2 *Pour tout* $z \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(z) > 0, \ n \in \mathbb{N}$, *on a*

1. $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$
2. $\Gamma(n) = (n-1)!$
3. $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties :

$$\begin{aligned}\Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + z\int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z)\end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquons 1 pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $n = 0$, on a $\Gamma\left(0+\frac{1}{2}\right) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0(0!)} = \sqrt{\pi}$.

- Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n. C-à-d que supposons que $\Gamma\left((n-1)+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, est vérifié. Alors

$$\begin{aligned}\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \left(n-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(n-\frac{1}{2}\right) = \left(n-\frac{1}{2}\right)\frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right)\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} = \frac{2n}{2n}\frac{(2n-1)}{2}\frac{(2n-2)!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}.\end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n. ■

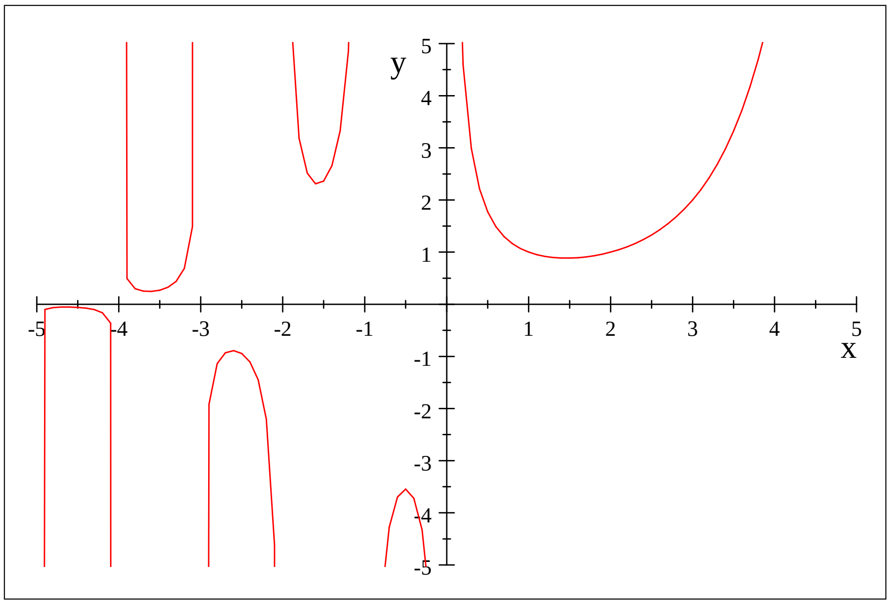
Remarque 1.1.1 *La détermination de la fonction Gamma pour les valeur négatifs non entièrs par la formule* $\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$, *et la transition d'un intervalle à un autre* $(-1,0)$, $(-2,-1)$, $(-3,-1)$, ... *etc.*

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeur négatifs entiers.

Exemple 1.1.2 1. $\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2. $\Gamma\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{3}{2}+1\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

- Le graphe de la fonction Γ d'Euler



Le Graphe de la fonction Γ d'Euler

Proposition 1.1.1 *Pour tout $p > 0$, on a*

$$\Gamma(p) = \lim_{n \to +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \ldots\ldots (p+n)}.$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n,p) = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx,$$

on peut facilement voir que

$$\lim_{n \to +\infty} f(n,p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^{p-1} dx = \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^p}{p}\right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx \\ &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx. \end{aligned}$$

Encore fois, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} x^p dx = \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-2} x^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)...[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)} dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)...[p+(n-1)]} \left[\frac{x^{n+p}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n! n^p}{p(p+1)...(n+p)}. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2).......(p+n)}.$$

■

1.2 La fonction Beta

Définition 1.2.1 *La fonction de Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dx, \ \ (p,q \in \mathbb{C}, \ \operatorname{Re}(p) > 0, \ \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p) > 0$, $\operatorname{Re}(q) > 0$, on a

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Soit $D = (0,+\infty) \times (0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy\right) \\ &= \iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy, \end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u.$$