Après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n,p) &= \frac{n(n-1)\ldots[n-(n-1)]}{n^n p(p+1)\ldots[p+(n-1)]}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^{n-n} x^{p+(n-1)}dx \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1)\ldots[p+(n-1)]}\left[\frac{x^{n+p}}{n+p}\right]_0^n \\ &= \frac{n!n^p}{p(p+1)\ldots(n+p)}. \end{aligned}$$

par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n!n^p}{p(p+1)(p+2)\ldots\ldots(p+n)}.$$

■

1.2 La fonction Beta

Définition 1.2.1 *La fonction de Beta est un type d'intégrale d'Euler définie par*

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dx,\ \ (p,q\in\mathbb{C},\ \operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0).$$

Pour tout $p,q\in\mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p)>0,\ \operatorname{Re}(q)>0$, on a

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Soit $D=(0,+\infty)\times(0,+\infty)$, on a

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx\right)\left(\int_0^{+\infty} y^{q-1}e^{-y}dy\right) \\ &= \iint_D x^{p-1}y^{q-1}e^{-(x+y)}dxdy, \end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnées, considérons les nouvelles cordonnées

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv-u(1-v) = -u.$$

De meme que le domaine $D^{'}$ correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D^{'} = \{(u, v) \,/\, u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dxdy &= \iint_{D^{'}} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} |-u| \, dudv \\
&= \iint_{D^{'}} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \\
&= \Gamma(p+q) B(p,q),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffter est définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)},\ \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)},\ \alpha, \beta > 0$$

Exemple 1.3.1 *1.*

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh\sqrt{x}.$$