De meme que le domaine D' correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D' = \{(u,v) \,/\, u \geq 0,\ 0 \leq v \leq 1\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\iint_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dxdy &= \iint_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} \left|-u\right| dudv \\
&= \iint_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\
&= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du \right) \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \\
&= \Gamma(p+q) B(p,q),
\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

1.3 Fonction de Mittag-Leffter

Définition 1.3.1 *La fonction de Mittag-Leffter est définie par*

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\ \alpha > 0,$$

et la fonction de Mittag-Leffter généralisée est définie par

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \alpha, \beta > 0$$

Exemple 1.3.1 *1.*

$$E_1(x) = E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

2.

$$E_2(x) = E_{2,1}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(2k)!} = \cosh\sqrt{x}.$$

3.

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{1}{x}(e^x - 1).$$

4.

$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2}(e^x - 1 - x).$$

Théorème 1.3.1 *Pour $\alpha = n \in \mathbb{N},\ \lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n E_n(\lambda x^n) &= \lambda E_n(\lambda x^n), \\ \left(\tfrac{d}{dx}\right)^n x^{\beta-1} E_{n,\beta}(\lambda x^n) &= \lambda x^{\beta-n-1} E_n(\lambda x^n), \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 *Pour $\alpha, \beta > 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$, on a*

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda},\ s > 0,\ |\lambda s^\alpha| < 1.$$

Preuve. Grâce à la définition de transformée de Laplace, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha) e^{-st} dt \\ &= \int_0^{+\infty} t^{\beta-1} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda t^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} e^{-st} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} t^{\alpha k + \beta - 1} e^{-st} dt, \end{aligned}$$

posons le changement de variable $st = \tau$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \int_0^{+\infty} \tau^{\alpha k + \beta - 1} e^{-\tau} dt \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^k s^{-\alpha k - \beta}}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \Gamma(\alpha k + \beta) \\ &= s^{-\beta} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k, \end{aligned}$$

et pour $|\lambda s^\alpha| < 1$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda s^{-\alpha}\right)^k = \frac{1}{1-\lambda s^{-\alpha}}$, donc

$$\mathcal{L}\left[t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^\alpha)\right](s) = \frac{s^{-\beta}}{1 - \lambda s^{-\alpha}} = \frac{s^{\alpha-\beta}}{s^\alpha - \lambda}.$$

■