

Remarque 2.2.2 Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1)\dots(\lambda+1-\alpha)t^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda))\dots(1-(\alpha-\lambda))t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \alpha-\lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{si } \alpha-\lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad \lambda > -1. \end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ C-à-d

$$(\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^{\alpha-m})(t) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}$$

2.2.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'interversion des compositions dans la formule de définition 2.1.1 semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 2.2.5 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.6 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Remarque 2.2.3 Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classique :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a+}^n f(t) = f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^C\mathcal{D}_{b-}^n f(t) = (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)) \end{cases}.$$

Heureusement, le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 2.2.1 Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors presque partout

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t) \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t) \end{aligned}$$

Proposition 2.2.2 Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} 1. \quad ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n. \\ 2. \quad ({}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1})(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition et proposition on a

$$({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-1-(n-1))(t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)(t-a)^{\beta-n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} ({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-n-1} d\tau, \text{ posons } \tau-a = s(t-a) \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ &= \left| B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \text{ puisque } (\beta-1)(\beta-2)\dots(\beta-n)\Gamma(\beta-n) = \Gamma(\beta). \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 2.2.4 Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$ on a

$$\begin{aligned} ({}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^\lambda)(t) &= \frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-(n-1))\Gamma(\lambda-(n-1))}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & \text{si } \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}, \quad \lambda > -1. \end{aligned}$$

C-à-d

$$({}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^m)(t) = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Théorème 2.2.1 Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)$ existe. Alors

$$({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) = \mathcal{D}_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right],$$

presque pour tout $t \in [a, b]$.

Preuve. On a par définition

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\ &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] d\tau \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par partie

$$\begin{aligned} g(\tau) = f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k &\rightarrow \frac{d}{d\tau} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] \\ \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} &\rightarrow -\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} [g(t)] &= \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \left[f(\tau) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (\tau-a)^k \right] d\tau \\ &= \left[\frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g(\tau) \right]_a^t - \int_a^t \frac{(t-\tau)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \frac{d}{d\tau} g(\tau) d\tau \end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} [g(t)] = \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha+1} \frac{d}{dt} g(t)$$

De même façon pour n -fois,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\
 &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} g(t) \\
 &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\
 &= \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t), \quad \frac{d^n}{dt^n} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] = 0,
 \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{a^+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right] \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} [g(t)] \\
 &= \left(\frac{d}{dt} \right)^n \mathcal{I}_{a^+}^n \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\
 &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\
 &= ({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t).
 \end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1 Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)$, $({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t)$ sont existents, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Alors

$$({}^C \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = (\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t).$$

2.2.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pour $h > 0$ on a :

$$f'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(t) - f(t-h)]$$