De même façon pour n-fois,

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right] &= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha+n}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}g\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right),\ \frac{d^n}{dt^n}\left[\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]=0,
\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right] &= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[f\left(t\right)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}\left(a\right)}{k!}\left(t-a\right)^k\right]\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\left[g\left(t\right)\right]\\
&= \left(\frac{d}{dt}\right)^n\mathcal{I}_{a^+}^{n}\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\\
&= \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}\frac{d^n}{dt^n}f\left(t\right)\\
&= \left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)\left(t\right).
\end{aligned}$$

■

Corollaire 2.2.1 *Soientt* $\alpha\geq 0$, $n=[\alpha]+1$ *et* $\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)$, $\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)$ *sont existent, on suppose que* $f^{(k)}\left(a\right)=0$ *pour* $k=0,1,...,n-1$.*Alors*

$$\left({}^{C}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t).$$

2.2.3 Dérivées fractionnaires de Grünwald-Letnikov

Cette définition se base sur l'obtention de dérivées par différences finies.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, pour $h>0$ on a :

$$f'\left(t\right)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f\left(t\right)-f\left(t-h\right)\right]$$

et la dérivée seconde :

$$\begin{aligned}
f^{''}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[f^{'}(t)-f^{'}(t-h)\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{1}{h}\left(f(t)-f(t-h)\right)-\frac{1}{h}\left(f(t-h)-f(t-2h)\right)\right] \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[f(t)-2f(t-h)+f(t-2h)\right].
\end{aligned}$$

Plus généralement, la dérivée n$^{\text{ième}}$ de f et donnée par :

$$f^{(n)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_k^n f(t-kh), \tag{1.1}$$

où

$$C_k^n=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}.$$

Il est possible d'étendre C_k^n à $k>n$, en posant $C_k^n=0$.

La formule (1.1) devient alors

$$f^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Là encore, on peut généraliser le terme de droite grâce à la fonction Gamma, en posant pour $\alpha\in\mathbb{R}^+-\mathbb{N}$, et $k\in\mathbb{N}$,

$$C_k^\alpha=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\,\Gamma(\alpha-k+1)}.$$

Notons cette fois que $C_k^\alpha\neq 0$ même si $k>n$,

Définition 2.2.7 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à gauche d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ {}^{GL}\mathcal{D}_+^\alpha f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh).$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 2.2.8 *Soit $\alpha>0$, La dérivée fractionnaire de Grünwald-Letnikov à droite d'ordre α de f est définie par :*

$$\forall t\in\mathbb{R},\ {}^{GL}\mathcal{D}_-^\alpha f(t)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t+kh).$$

La dérivée de Grünwald-Letnikov présente un intérêt numérique évident. Si h est assez petit, l'évaluation discrète de $\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k C_k^\alpha f(t-kh)$ permet d'approximer la dérivée fractionnaire (de Liouville) sur $\mathbb{R}$.