2.2.4 Propriétés des opérateurs fractionnaires

Un des intérêts du calcul fractionnaire est qu'il généralise aussi certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques : la dérivée fractionnaire de l'intégrale du même ordre donne l'identité, la dérivée d'une dérivée redonne sous certaines conditions une dérivée, l'intégration par parties reste valable et les opérateurs fractionnaires se conjuguent très bien avec les transformées de Fourier et Laplace. Cette dernière propriété est omniprésente dans de nombreux domaines d'applications présents dans la section précédente.

Linéarité

La différentiation et l'intégration fractionnaires sont des opérateurs linéaires :

$$\mathcal{D}^{\alpha}\left(\lambda f(t)+\mu g(t)\right)=\lambda\mathcal{D}^{\alpha}f(t)+\mu\mathcal{D}^{\alpha}g(t),$$

pour n'importe quelle approche de dérivation.

Compositions entre opérateurs

Proposition 2.2.3 *Soit* $\alpha>0,\ \beta>0,\ n=[\alpha]+1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. Si $f(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq p\leq\infty),,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=f(t),\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=f(t),$$

2. Si $\alpha>\beta,$ *et* $f(t)\in L_p([a,b]),\ (1\leq p\leq\infty),$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta}f\right)(t),\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t)=\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha-\beta}f\right)(t),$$

3. Si $f(t)\in C^{q}([a,b]),\ q=[\alpha+\beta]+1,$ *alors*

$$\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta}f\right)(t),\ \text{ et }\ \left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}f\right)(t)=\left(\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta}f\right)(t),$$

4. Si $f(t)\in L_1([a,b]),\ \left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)\in AC^{n}([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(t-a)^{\alpha-k},\\
\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}f\right)(t) &= f(t)-\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\left(\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha}f\right)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha-k+1)}(b-t)^{\alpha-k},
\end{aligned}$$

En particulier si $0<\alpha\leq 1$

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t),\\
\left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^{C}\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t),
\end{aligned}$$

Proposition 2.2.4 *Soit* $\alpha > 0,\ \beta > 0,\ n = [\alpha] + 1,$ *on a les propriétés suivantes:*

1. *Si* $f(t) \in C^q([a,b]),\ q = [\alpha + \beta] + 1,$ *alors*

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\beta}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f\right)(t),\ \ et\ \ \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\beta}\ f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

2. *Si* $f(t) \in C^n([a,b]),$ *ou* $f(t) \in AC^n([a,b]),$ *alors*

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f)^{(k)}(a)}{k!}(t-a)^k, \\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}(f)^{(k)}(b)}{k!}(b-t)^k,\end{aligned}$$

En particulier si $0 < \alpha \leq 1$

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - f(a), \\ \left(\mathcal{I}_{b^-}^{\alpha}\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha}\ f\right)(t) &= f(t) - f(b),\end{aligned}$$

Intégration par parties

La formule d'intégration par parties est une des propriétés extensibles aux opérateurs fractionnaires mais là encore sous certaines restrictions. C'est ici qu'apparaissent inévitablement les opérateurs à droite. Dans [8] apparait une formule d'intégration par parties, mais elle requiert plusieurs conditions. Nous préférons donner ici une version simplifiée avec des conditions explicites que nous avons trouvé dans [35].

Corollaire 2.2.2 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$ *tels que* $n - 1 < \alpha \leq n$. *Soit* $f(t) \in C^n([a,b]),$ *et* $g(t) \in C^n([a,b]),$ *et Alors*

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\,\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} f(t)\,g(t)\,dt \\ \int_a^b f(t)\,\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha} g(t)\,dt &= \int_a^b \mathcal{D}_{a^+}^{\alpha} f(t)\,g(t)\,dt\end{aligned}$$

Transformée de Fourier

La transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ peut-être définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \mathcal{F}[f](\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{-it\xi}dt$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si f ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre n sont intégrables, alors

$$\mathcal{F}\left[f^{(n)}\right](\xi) = (i\xi)^n \mathcal{F}[f](\xi)$$

Ce résultat se généralise aux opérateurs fractionnaires définis sur $\mathbb{R}$.

Lemme 2.2.2 *Soit* $0 < \alpha \leq 1,\ f \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $\mathcal{D}_{\pm}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R}),\ 1 \leq k \leq n$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{-\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Corollaire 2.2.3 *Soit* $\alpha > 0$ *et* $n = [\alpha] + 1,$ *et* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Alors*

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{\pm}^{\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Preuve. D'aprés le lemme 2.2.2,

$$\mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{\pm}^{n-\alpha} f\right](\xi) = (\pm i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi)$$

Comme pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f = \mathcal{D}_{+}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$. Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{+}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[\frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right] = (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{+}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\
&= (i\xi)^n (+i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\
&= (+i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi).
\end{aligned}$$

De même pour tout $1 \leq k \leq n$, $\frac{d^k}{dt^k}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f = (-1)^k \mathcal{D}_{-}^{k+\alpha-n} f \in L^1(\mathbb{R})$, donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left[\mathcal{D}_{-}^{\alpha} f\right](\xi) &= \mathcal{F}\left[(-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right] = (-1)^n (i\xi)^n \mathcal{F}\left[\mathcal{I}_{-}^{n-\alpha} f\right](\xi) \\
&= (-i\xi)^n (-i\xi)^{\alpha-n} \mathcal{F}[f](\xi) \\
&= (-i\xi)^{\alpha} \mathcal{F}[f](\xi).
\end{aligned}$$

■

Transformée de Laplace

On dit qu'une fonction réelle $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à croissance sous-exponentielle si

$$\exists A > 0,\ \exists s_0 \in \mathbb{R},\ \exists t_0 > 0,\ \forall t > t_0\ ;\ |f(t)| \leq e^{s_0 t}.$$

Si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, rappelons que sa transformée de Laplace est définie par

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[f](s) = \int_0^{+\infty} f(t)\, e^{-st} dt$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, si $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle, alors

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) = s^n \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0). \tag{2.1}$$

L'extension au cas fractionnaire s'effectue cette fois avec les opérateurs fractionnaires à supports minorés par 0.

Lemme 2.2.3 *Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{I}_0^\alpha f](s) = s^{-\alpha} \mathcal{L}[f](s).$$

Proposition 2.2.5 *Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$, et $f \in C^n(\mathbb{R}^+)$, est à croissance sous-exponentielle. Alors*

1.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).$$

2.

$$\forall s > s_0,\ \mathcal{L}\left[{}^C\mathcal{D}_0^\alpha f\right](s) = s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} (f)^{(k)}(0).$$

Preuve.

1. On applique (2.1) à $\left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)$, puis on utilise le lemme 2.2.3 :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\mathcal{D}_0^\alpha f](s) &= \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dt^n} \mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) = s^n \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^n s^{\alpha-n} \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0) \\
&= s^\alpha \mathcal{L}[f](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} \left(\mathcal{I}_0^{n-\alpha} f\right)^{(k)}(0).
\end{aligned}$$

2. De même on applique le lemme 2.2.3 à $f^{(n)}$, puis on utilise (2.1) :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[{}^{C}\mathcal{D}_{0}^{\alpha}f\right](s) &= \mathcal{L}\left[\mathcal{I}_{0}^{n-\alpha}\frac{d^{n}}{dt^{n}}f\right](s) = s^{\alpha-n}\mathcal{L}\left[f^{(n)}\right](s) \\ &= s^{\alpha-n}\left[s^{n}\mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{n-k-1}f^{(k)}(0)\right] \\ &= s^{\alpha}\mathcal{L}\left[f\right](s) - \sum_{k=0}^{n-1}s^{\alpha-k-1}f^{(k)}(0)\,.\end{aligned}$$

■

Remarque 2.2.5 *On remarquera l'absence de généralisation pour la dérivée du produit et de la composition de deux fonctions. Ces caractéristiques de la dérivée classique passent effectivement mal au fractionnaire. Quelle que soit la définition utilisée et même avec des restrictions sur les fonctions :*

$$\begin{aligned}&\mathcal{D}^{\alpha}(fg) \neq (\mathcal{D}^{\alpha}f)\,g + f\,(\mathcal{D}^{\alpha}g) \\ &\mathcal{D}^{\alpha}(fg) \neq \tfrac{(\mathcal{D}^{\alpha}f)g - f(\mathcal{D}^{\alpha}g)}{g^{2}} \\ &\mathcal{D}^{\alpha}(f\circ g) \neq (\mathcal{D}^{\alpha}f)(g)\,.g^{'}.\end{aligned}$$