Chapitre 3

Equations Différentielles Fractionnaires

Dans cette chapitra on va discuter les propriétés d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles d'ordre fractionnaire. On va se restreindre à des problèmes aux conditions initiales (problèmes de Cauchy). On commence par donner une définition d'une équation différentielle d'ordre fractionnaire (EDF) :

Définition 3.0.9 *Soit* $\alpha > 0,\ \alpha \notin \mathbb{N},\ n = [\alpha] + 1$ *et* $f : A \sqsubset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},$ *alors :*

$$\mathcal{D}^{\alpha} y\,(t) = f\,(t, y\,(t))\,, \tag{3.1}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville.
De la même manière

$$^{C}\mathcal{D}^{\alpha} y\,(t) = f\,(t, y\,(t))\,, \tag{3.3}$$

est appelée équation différentielle fractionnaire de type Caputo.

3.1 Equation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville

On commence par l'équation homogène de type Riemann-Liouville.

Lemme 3.1.1 *Soit* $\alpha > 0$. *Si nous supposons que* $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$, *alors l'quation différentielle fractionnaire de type Riemann-Liouville:*

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = 0, \quad 0 < t < 1, \tag{3.5}$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, *avec* $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.2, on a:

$$\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} t^{\alpha-m} = 0, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.5), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^{\alpha-m}, \qquad \text{avec} \quad m = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.6}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (3.5), donné comme une somme des solutions particulières (3.6), C.-à-d.

$$u(t) = C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \ldots, n$. ■

Lemme 3.1.2 *Supposons que*

$$u \in C(0,1) \cap L(0,1), \ \ et \quad \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u \in C(0,1) \cap L(0,1).$$

Alors:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha} u(t) = u(t) + C_1 t^{\alpha-1} + C_2 t^{\alpha-2} + \cdots + C_n t^{\alpha-n}. \tag{3.7}$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, *avec* $m = 1, 2, \ldots, n$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C(0,1) \cap L(0,1)$ (Proposition 2.2.3) on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) &= u(t) - \sum_{k=1}^{n}\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-k)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-k+1)}t^{\alpha-k} \\
&= u(t) - \left[\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-1)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1} + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-2)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-1)}t^{\alpha-2} + .. + \frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u\right)(0)}{\Gamma(\alpha-n+1)}t^{\alpha-n}\right]
\end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{\left(\mathcal{I}_{0^+}^{n-\alpha}u^{(n-m)}\right)(0)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 1, 2, \ldots, n$, on trouve l'égalité (3.7).

■

Lemme 3.1.3 *Soit* $1 < \alpha \leq 2$, *et* $y \in C([0,1])$.

Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t) = 0, & 0 < t < 1 \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}, \tag{3.8}$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t,s)\,y(s)\,ds,$$

tel que:

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}-(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq s \leq t \leq 1. \\ \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & si \quad 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \tag{3.9}$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}$, sur l'équation (3.8) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\left[\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + y(t)\right] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.1.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ $(n = [\alpha] + 1 = 2)$, on a:

$$\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}\mathcal{D}_{0^+}^{\alpha}u(t) = u(t) + C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2},\ C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_1t^{\alpha-1} + C_2t^{\alpha-2} + \mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) = 0,$$

ce qui imlique

$$u(t) = -\mathcal{I}_{0^+}^{\alpha}y(t) - C_1t^{\alpha-1} - C_2t^{\alpha-2},$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.8) , donne par:

$$u(t) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 t^{\alpha-1} - C_2 t^{\alpha-2}. \tag{3.10}$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) = 0 & \Rightarrow & 0 = -0 - 0 - \lim\limits_{t\to 0} C_2 t^{\alpha-2} & \Rightarrow & C_2 = 0, \\ u(1) = 0 & \Rightarrow & 0 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds - C_1 & \Rightarrow & C_1 = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds. \end{cases}$$

L'équation intégro-différentielle (3.10) , équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &\quad + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left[t^{\alpha-1} (1-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}\right] y(s)\, ds + \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s)\, ds \\ &= \int_0^t \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds + \int_t^1 \frac{[t(1-s)]^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(s)\, ds \\ &= \int_0^1 G(t,s)\, y(s)\, ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■