

3.2 Equation différentielle fractionnaire de type Caputo

On commence par l'équation homogène de type Caputo.

Lemme 3.2.1 *Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(0, 1) \cap L(0, 1)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Caputo:*

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) = 0, \quad (3.11)$$

admet une solution unique

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 2.2.4, on a:

$${}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^m = 0, \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire (3.11), admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m t^m, \quad \text{pour } m = 0, 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.12)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (3.11), donné comme une somme des solutions particulières (3.12), C.-à-d.

$$u(t) = C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}.$$

■

Lemme 3.2.2 *Supposons que $u \in C^n([0, 1])$. Alors:*

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \cdots + C_{n-1} t^{n-1}. \quad (3.13)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Preuve.

Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in C^n([0, 1])$ (Proposition 2.2.4) on a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) &= u(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{u^{(k)}(0)}{k!} t^k \\ &= u(t) - \left[u(0) + u'(0)t + \frac{u''(0)}{2}t^2 + \cdots + \frac{u^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1} \right] \end{aligned}$$

On pose $C_m = -\frac{u^{(m)}(0)}{m!} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 0, 1, 2, \dots, n-1$, on trouve facilement l'égalité (3.13). ■

Lemme 3.2.3 Soit $1 < \alpha \leq 2$, et $y \in C([0, 1])$.

Alors l'unique solution de preblème aux limites

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) = y(t), & 0 < t < 1 \\ u(0) + u'(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0 \end{cases}, \quad (3.14)$$

est donné par:

$$u(t) = \int_0^1 G(t, s) y(s) ds,$$

tel que:

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1} + (t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq s \leq t \leq 1, \\ \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} & \text{si } 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Preuve.

En appliquant $\mathcal{I}_{0+}^\alpha$, sur l'équation (3.14) on obtient:

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha [{}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) - y(t)] = 0 \Leftrightarrow \mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) - \mathcal{I}_{0+}^\alpha y(t) = 0.$$

D'après le Lemme 3.2.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ ($n = [\alpha] + 1 = 2$), on a:

$$\mathcal{I}_{0+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha u(t) = u(t) + C_0 + C_1 t, \quad C_0, C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) + C_0 + C_1 t - \mathcal{I}_{0+}^\alpha y(t) = 0,$$

ce qui implique

$$u(t) = \mathcal{I}_{0+}^\alpha y(t) - C_0 - C_1 t,$$

Par conséquent, la solution générale de l'équation (3.14), donne par:

$$u(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds - C_0 - C_1 t. \quad (3.16)$$

Les condition aux limites implique que:

$$\begin{cases} u(0) + u'(0) = 0 & \Rightarrow C_0 + C_1 = 0 \\ u(1) + u'(1) = 0 & \Rightarrow C_0 + 2C_1 = (\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)(1) + (\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)'(1) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} C_0 = -(\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)(1) - (\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)'(1) \\ \quad = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ C_1 = (\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)(1) + (\mathcal{I}_{0+}^\alpha y)'(1) \\ \quad = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \end{cases}$$

L'équation intégrale-différentielle (3.14), équivalente à:

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds - \frac{t}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds \\ &\quad - \frac{t}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-1} y(s) ds + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^t (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ &\quad + \frac{(1-t)}{\Gamma(\alpha-1)} \int_t^1 (1-s)^{\alpha-2} y(s) ds \\ &= \int_0^t \left[\frac{(t-s)^{\alpha-1} + (1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s) ds \\ &\quad + \int_t^1 \left[\frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{(1-t)(1-s)^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} \right] y(s) ds \\ &= \int_0^1 G(t,s) y(s) ds. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■