Numerical Methods for Solving Lienard's Equation

Presented by: Lina CHETIOUI
Directed by: Dr Ali KHALOUTA

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics
Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria
E–mail: lina.chetioui@univ-setif.dz

D*esamber 31, 2022,*

Plan du présentation

1. Introduction
2. L'équation de Lienard fractionnaire
3. Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard
   - La méthode de transformation déffirentielle
   - La méthode de perturbation d'homotopie variationnelle (MPHV)
4. Exemples numériques sur l'équation de Lienard
5. Conclution
6. Bibliography

Introduction

Des problèmes non linéaires apparaissant dans de nombreux phénomènes physiques, l'ingénierie et les applications scientifiques sont modélisés avec des équations différentielles non linéaires. L'une de ces équations est l'équation du Lienard, qui est une équation différentielle de deuxième ordre, du nom du physicien français Alfred-Marie Lienard, en 1928. L'équation de Lienard a la forme générale :

$$u''(x) + f(u)u'(x) + g(u) = h(x) \tag{1}$$

L'équation de Lienard dans sa forme générale est très difficile à résoudre. De nombreux chercheurs ont étudié des cas particuliers de l'équation de Lienard, dans cette étude, nous discutons de cette forme, si :

Introduction

$$f(u) = 0$$
$$g(u) = au(x) + bu^3(x) + cu^5(x)$$
$$h(x) = 0$$

Ensuite nous avons :

$$u''(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0 \tag{2}$$

où a, b et c sont des constants réels.
De nombreux chercheurs ont résolu l'équation (2) en utilisant plusieurs méthodes numériques. Par exemple, la méthode de perturbation d'homotopie variationnelle[2], la méthode de transformation différentielle [1], la méthode de la série de puissance résiduelle [3], etc.

L'équation de Lienard fractionnaire

L’équation de Lienard fractionnaire

Le calcul fractionnaire est la branche des mathématiques qui traite de l’étude et des applications des intégrales et des dérivées d’ordre arbitraire. Aujourd’hui, les équations différentielles fractionnaires prennent une importance croissante dans de nombreux domaines tels que les mathématiques, les systèmes dynamiques, le traitement du signal, la théorie du contrôle et l’économie. En raison des applications croissantes, il y a eu un grand intérêt pour le développement de méthodes de résolution d’équations différentielles fractionnaires. Récemment, diverses méthodes ont été proposées pour résoudre les équations différentielles fractionnaires non-linéaires.

En tant que généralisation de l’équation du Lienard (2) au cas fractionnaire, nous étudierons la classe suivante de l’équation fractionnaire de la forme de Lienard :

L'équation de Lienard fractionnaire

$$D^{2\alpha}u(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0, \frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \qquad (3)$$

pour $x > 0$, sous réserve :

$$u(0) = u_0, D^{\alpha}u(0) = u_1 \qquad (4)$$

où a, b, c, u_0 et u_1 sont constants.

L'équation de Lienard fractionnaire

Définition

Soit n être le plus petit entier supérieur ou égal à α .La dérivée fractionnaire de caputo de l'ordre $\alpha > 0$ est défini comme :

$$D^{\alpha}u(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{0}^{x} (x-t)^{n-\alpha-1} u^{(n)}(t)dt, & n-1 < \alpha < n, \\ u^{(n)}(x), & \alpha = n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

L'équation de Lienard fractionnaire

Théoreme

La dérivée fractionnaire de caputo de la fonction de puissance est donné par

$$D^{\alpha}x^{p}=\begin{cases}\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p-\alpha+1)}x^{p-\alpha}, & n-1<\alpha<n, p>n-1, p\in\mathbb{R},\\ 0, & n-1<\alpha<n, p\leq n-1, p\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

SYAM [3] a étudié la solution exacte de l'équation (3) sous réserve de l'équation (4), en utilisant la méthode de la série de puissance résiduelle.Alors,

$$u_2=-(au_0+bu_0^3+u_0^5) \tag{5}$$

$$u_3=-(au_1+3bu_0^2u_1+5cu_0^4u_1) \tag{6}$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

La méthode de transformation déffirentielle

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

La méthode de transformation déffirentielle

La transformation différentielle de la fonction $u(x)$ est définit comme suit

$$U(k) = \frac{1}{k!}[\frac{d^k u(x)}{dx^k}]_{x=0}. \tag{7}$$

Dans l'équation(7), $u(x)$est la fonction originale et $U(k)$est la fonction transformée. La transformée inverse différentielle de $U(k)$ est définit comme suit

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k U(k). \tag{8}$$

En fait, pour les équations (7) et (8) , on obtient

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}[\frac{d^k u(x)}{dx^k}]_{x=0} \tag{9}$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

L'équation (9) implique que le concept de transformation différentielle est dérivé du développement en série de Taylor .À partir de la définition des équations (7)et (8),il est facile d'obtenir les opérations mathématiques suivantes
1) Si $u(x) = v(x) + w(x)$, alors $U_k(x) = V_k(x) + W_k(x)$.
2) Si $u(x) = av(x), a \in \mathbb{R}$,alors $U(k) = aV(k)$.
3) Si $u(x,t) = v(x)w(x)$, alors $U(k) = \sum_{r=0}^{k} V(r)W(k-r)$.
4) Si $u(x) = x^n$, alors $U(k) = \delta(k-n)$. 5) Si $u(x) = u_1(x)u_2(x)...u_{n-1}(x)u_n(x)$, alors

$$W_k(x) = \sum_{k_{n-1}=0}^{k} \sum_{k_{n-2}=0}^{k_{n-1}} ... \sum_{k_2=0}^{k_3} \sum_{k_1=0}^{k_2} U_1(k_1)U_2(k_2-k_1)(x) \times ... \times U_{n-1}(k_{n-1}-k_{n-2})U_n(k-$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

La méthode de perturbation d'homotopie variationnelle (MPHV)

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

La méthode de perturbation d'homotopie variationnelle (MPHV) pour l'équation de Lienard

Dans cette section, nous considérons l'équation de Lienard (2)

$$u''(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0$$

Avec des conditions initiales

$$u(0) = C_1, u'(0) = C_2, \tag{10}$$

En utilisant des conditions initiales (10), nous choisissons :

$$u_0(x) = C_1 + C_2 x, \tag{11}$$

Où (11) est une approximation initiale de l'équation (2). Par MPHV, nous considérons :

$$L(u) = u'',$$

$$N(u) = au + bu^3 + cu^5,$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

Où L est un linéaire et N est un opérateur non linéaire.
Selon la méthode d'itération variationnelle, nous pouvons construire un fonctionnel correct comme suit :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda(\tau)\{y_{n_{\tau\tau}} + a\tilde{u}_n + b\tilde{u}_n^3 + c\tilde{u}_n^5\}d\tau,$$

où $\tilde{u}_n$ est considéré comme une variation restreinte.
En faisant la stationnaire fonctionnel ci-dessus, le multiplicateur Lagrange peut être déterminé comme $\lambda = \tau - x$, qui donne la formule d'itération suivante :

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x (\tau - x)\{u_{n_{\tau\tau}} + au_n + bu_n^3 + cu_n^5\}d\tau,$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

En appliquant la méthode de perturbation d'homotopie variationnelle, nous avons :

$$u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + ... = C_1 + C_2 x$$

$$+p \int_0^x (\tau - x) a(x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + ...) d\tau$$

$$+p \int_0^x (\tau - x) b(x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + ...)^3 d\tau$$

$$p \int_0^x (\tau - x) c(x_0 + px_1 + p^2 x_2 + p^3 x_3 + ...)^5 d\tau$$

Méthodes numériques pour résoudre l'équation de Lienard

Comparaison du coefficient de pouvoirs similaires de p que nous avons :

$$p^0 : u_0(x) = C_1 + C_2 x,$$

$$p^1 : u_1(x) = \int_0^x (\tau - x) a u_0 d\tau + \int_0^x (\tau - x) b u_0^3 d\tau + \int_0^x (\tau - x) c u_0^5 d\tau, \qquad (12)$$

$$\vdots$$

Nous obtenons donc les composants qui constituent $u(x)$, donc nous aurons :

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots .$$

Pour un calcul numérique ultérieur, nous laissons l'expression :

$$\varphi_n = \sum_{i=0}^{n} u_i(x), \qquad (13)$$

indiquer l'approximation à n-terme $u(x)$.

Exemples numériques sur l'équation de Lienard

Exemples numériques sur l'équation de Lienard

Exemple01 : On considère l'équation de Lienard :

$$u''(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0 \tag{14}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$u(0) = \sqrt{\frac{-2a}{b}}, u'(0) = -\frac{a\sqrt{-a}}{b\sqrt{\frac{-2a}{b}}} \tag{15}$$

Maintenant, nous présenterons les solutions numériques par les méthodes perméables.

Exemple numérique sur l'équation de Lienard

Résolution d'exemple 1 en utilisant MPHV

Pour résoudre l'exemple par MPHV, nous utiliserons l'équation (12) Nous avons :

$$u_0 = \sqrt{\frac{-2a}{b}} + -\frac{a\sqrt{-a}}{b\sqrt{\frac{-2a}{b}}}x,$$

$$u_1(x) = \int_0^x (\tau - x)(au_0(\tau) + bu_0^3(\tau) + cu_0^5(\tau))d\tau,$$

$$u_1(x) = \frac{5ca^5x^7(-a)^{\frac{5}{2}}}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}} + \frac{70ca^7x^6}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}} - \frac{5b^2a^4x^5(-a)^{\frac{3}{2}}}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}}$$

Exemples numérique sur l'équation de Lienard

$$-\frac{700b^2a^4x^3(-a)^{\frac{1}{2}}}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}}+\frac{2800ca^5x^3(-a)^{\frac{1}{2}}}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}}-\frac{840b^2a^4x^2}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}}+\frac{3360ca^5x^2}{210b^5(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}}$$

$$\vdots$$

Nous obtenons donc les composants qui constituent $u(x)$, donc nous aurons :

$$u(x)=u_0+u_1+u_2+\ldots.$$

$$u(x)=\sqrt{\frac{-2a(1+\tanh\sqrt{-a}x)}{b}}$$

Exemples numérique sur l'équation de Lienard

Résolution d'exemple 1 en utilisant MTD

Prenant une transformée différentielle de l'équation (14), nous pouvons obtenir

$$U(k+2) = \frac{1}{(k+2)(k+1)}[-aU(k) - b\sum_{k_2=0}^{k}\sum_{k_1=0}^{k_2} U(k_1)U(k_2-k_1)U(k-k_2) \quad (16)$$

$$-c\sum_{k_4=0}^{k}\sum_{k_3=0}^{k_4}\sum_{k_2=0}^{k_3}\sum_{k_1=0}^{k_2} U(k_1)U(k_2-k_1)U(k_3-k_2)U(k_4-k_3)U(k-k_4)]$$

Et la transformation des conditions initiales Eq (15) sont

$$U(0) = \sqrt{\frac{-2a}{b}}, U(1) = \frac{-a}{\sqrt{2b}} \quad (17)$$

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

Utilisation d'équation (16) de la relation de récurrence et les conditions initiales transformées Eq. (17) , La solution approximative du Lienard Eq. (14) peut être dérivé comme

$$u(x) = \sqrt{\frac{-2a}{b}} + \frac{-a}{\sqrt{2b}}x + \frac{-1}{21(\frac{-2a}{b})^{\frac{1}{2}}}(\frac{-1}{2a} - \frac{1}{2b(\frac{-2a}{b})^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2c(\frac{-2a}{b})^{\frac{5}{2}}})x^2$$

$$+(\frac{-5b^{\frac{1}{2}}}{12a^2 2^{\frac{1}{2}}} + \frac{5b^{\frac{5}{2}}}{3ca^3 2^{\frac{1}{2}}})x^3 + \dots$$

$$u(x) = \sqrt{\frac{-2a(1 + \tanh\sqrt{-a}x)}{b}}$$

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

Exemple 2 : On considère l'équation de Lienard :

$$u''(x) + au(x) + bu^3(x) + cu^5(x) = 0 \tag{18}$$

Avec les conditions initiales suivantes :

$$u(0) = \sqrt{\frac{k}{2+D}}, u'(0) = 0 \tag{19}$$

Où $K = 4\sqrt{\frac{3a^2}{(3b^2-16ca)}}, D = -1 + \frac{b\sqrt{3}}{3b^2-16ac}$
Maintenant, nous présenterons les solutions numériques par les méthodes perméables.

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

Résolution d'exemple 2 en utilisant MPHV

Pour résoudre l'exemple 2 par MPHV, nous utiliserons l'équation (12)nous avons

$$u_0 = 2\sqrt{\frac{\sqrt{\frac{2a^2}{(3b^2-16ca)}}}{1+\frac{b\sqrt{3}}{3b^2-16ca}}}$$

$$u_1(x) = \int_0^x (\tau - x)(au_0(\tau) + bu_0^3(\tau) + cu_0^5(\tau))d\tau,$$

$$u_1(x) = \frac{-4\sqrt{6}x^2ab^2\sqrt{(a\sqrt{2})(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})}}{(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})^3}$$

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

$$-\frac{6x^2ab^2\sqrt{(a\sqrt{2})(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})}}{(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})^3}$$

$$-\frac{2\sqrt{3}x^2ab\sqrt{(3b^2-16ca)}\sqrt{(a\sqrt{2})(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})}}{(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})^3}$$

$$-\frac{4\sqrt{2}x^2ab\sqrt{(3b^2-16ca)}\sqrt{(a\sqrt{2})(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})}}{(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})^3}$$

$$-\frac{16x^2a^2c\sqrt{(a\sqrt{2})(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})}}{(b\sqrt{3}+\sqrt{(3b^2-16ca)})^3},$$

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

Nous obtenons donc les composants qui constituent $u(x)$, donc nous aurons :

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots .$$

$$u(x) = \sqrt{\frac{K \sec h(x\sqrt{-a})}{2 + D \sec h^2(x\sqrt{-a})}}$$

Où $K = 4\sqrt{\frac{3a^2}{(3b^2-16ca)}}, D = -1 + \frac{b\sqrt{3}}{3b^2-16ac}$

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

Résolution d'exemple 2 en utilisant MTD

Pour résoudre l'exemple 2 par MTD,la transformation des conditions initiales Eq (19) sont

$$U(0) = \sqrt{\frac{K}{2+D}}, U(1) = 0. \tag{20}$$

Utilisation d'équation (16) de la relation de récurrence et les conditions initiales transformées Eq. (20) , La solution approximative du Lienard Eq.(18) peut être dérivé comme

Exemples numérique sur l'équation de Liénard

$$u(x) = 2(3^{1/2}(a^2/(3b^2-16ca))^{1/2}/(1+3^1/2b/(3b^2-16ca)^1/2))^1/2$$
$$+(-a(3^{1/2}(a^2/(3b^2-16ca))^{1/2}/(1+3^{1/2}b/(3b^2-16ca)^{1/2}))^{1/2}$$
$$-4b(3^{1/2}(a^2/(3b^2-16ca))^{1/2}/(1+3^{1/2}b/(3b^2-16ca)^{1/2}))^{3/2}$$
$$-16c((3^{1/2}(a^2/(3b^2-16ca))^{1/2}/(1+3^{1/2}b/(3b^2-16ca)^{1/2}))^{5/2})x^2$$
$$+\cdots+\ldots$$
$$u(x) = \sqrt{\frac{K \sec h(x\sqrt{-a})}{2 + D \sec h^2(x\sqrt{-a})}}$$

Où $K = 4\sqrt{\frac{3a^2}{(3b^2-16ca)}}, D = -1 + \frac{b\sqrt{3}}{3b^2-16ac}$

Conclution

Dans ce travail,nous avons résolu l'équation de Liénard en utilisant plusieurs méthodes numériques.Ces inclure de la méthode de perturbation d'homotopie variationnelle (MPHV),de la méthode de transformation différentielle(MTD),de la méthode la série de puissance résiduelle(MSPR).Les méthodes sont décrites et illustrées par deux exemples numériques. Les résultats obtenus révèlent que les méthodes proposées sont des outils très efficace et simple pour résoudre ce type d'équations. Par conséquent, nous pouvons conclure que ces méthodes peut être utilisées pour obtenir des solutions de séries convergentes rapides pour de différents types d'équations différentielles non-linéaires.

Bibliography

- **M.Matinfar, S. Bahar and M. Ghasemi**, *"Solving the Lienard Equation by Differential Transform Method"*, **World Journal of Modelling and Simulation**, Vol. 8, (**2012**), pp. 142-146.
- **M.Matinfar, M. Mahdavi and Z. Raeisy**, *"Exact and Numerical Solution of Lienard's Equation by the Variational Homotopy Perturbation Method"*, **Journal of Information and Computing Science**, Vol. 6, (**2011**), pp. 73-80.
- **M. Syam**, *"A Numerical Solution of Fractional Lienard's Equation by Using the Residual Power Series Method"*, **Mathematics**, Vol. 6, (**2018**).


Merci
pour votre attention