# Quelqes methodes pour résoudre un modèle de population biologique fractionnaire

**Presented by:** Fatima HATHAT
**Directed by:** Dr. Ali KHALOUTA

Laboratory of Fundamental and Numerical Mathematics
Department of Mathematics, Faculty of Sciences,
Ferhat Abbas Sétif University 1, 19000 Sétif, Algeria
E–mail: fatima.hathat@univ-setif.dz

**siminaire 2023**

Janvier 7, 2023

# Plan de l’exposé

- Introduction
- Description du généralisé modifié Méthode des séries fractionnaires de Taylor (GMMSFT)
- Description du la méthode de perturbation par homotopie (MPH)
- Description du méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (MTDRF)
- Applications numériques
- Conclusion
- Références

# Introduction

Les équations différentielles fractionnaires (EDFs) sont des généralisations d'équations différentielles de l'ordre entier à l'ordre non entier. Ces dernières années, les EDFs ont attiré l'attention de nombreux chercheurs en raison d'un large éventail d'applications dans de nombreux domaines des mathématiques pures et appliquées tels que : la physique, la mécanique des fluides, l'électrochimie, la viscoélasticité, la théorie du contrôle non linéaire, les systèmes biologiques non linéaires et d'autres domaines de sciences et ingénierie. Par conséquent, une attention considérable a été accordée aux solutions de ces équations. Étant donné que de nombreux EDFs n'ont pas de solutions analytiques exactes en raison de la complexité des termes non linéaires inclus. Par conséquent, des techniques approximatives et numériques doivent être utilisées.

# Introduction

# Introduction

- On considère l'équation de population biologique fractionnaire suivante

$$D_t^{\alpha} u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + F(u), \tag{1}$$

avec la condition initiale

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \tag{2}$$

où $u = \left\{ u(x, y, t), (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \right\}$ désigne la densité de population,et $F(u)$ représente l'offre de population du aux naissances et aux décèson considère une forme plus générale de $F(u) = hu^a(1 - ru^b)$, $a, b, h$ *et* $r$ sont des constantes réelles et $D_t^{\alpha} = \dfrac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}$ est l'opérateur de dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $\alpha$ avec $0 < \alpha \leq 1$, *définie comme*

## Definition

La dérivée fractionnaire de Caputo d'ordre $n-1<\alpha\leq n$ pour une fonction $u(t)$ est défini comme

$$D^{\alpha}u(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{0}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha-1}u^{(n)}(\tau)d\tau,\ \ t>0.$$

où $\Gamma(.)$ est la fonction gamma.

# Introduction

## Definition

L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville $I^\alpha$ d'ordre $\alpha \geq 0$ pour une fonction $u(x, y, t)$ est définie par

$$I_t^\alpha u(x, y, t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} u(x, y, \tau) d\tau, \;\; t > 0.$$

*où* $\Gamma(.)$ *est la fonction gamma.*

Pour l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville et la dérivée fractionnaire de Caputo, nous avons la relation suivante

$$I_t^\alpha D_t^\alpha u(x, y, t) = u(x, y, t) - \sum_{k=0}^{n-1} u^{(k)}(x, y, 0) \frac{t^k}{k!}, \;\; t > 0.$$

# Description du GMMSFT

## Theorem

*On considère l'équation de population biologique fractionnaire de la forme (1) avec la condition initiale (2)*
*Alors, par la GMMSFT la solution des équations (1) et (2) est donnée sous forme de séries infinies qui convergent rapidement vers la solution exacte comme suit*

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}, \ (x, y) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, R],$$

.

# Description du GMMSFT

## Proof.

nous considérons les éléments biologiques fractionnaires dans le temps de Caputo suivants équation de population de la forme (1) avec la condition initiale (2).
Supposons que la solution prend la forme de série infinie suivante

$$u(x, y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \tag{3}$$

Par conséquent, la solution approchée des équations (1) et (2), peut s'écrire sous la forme

$$u_n(x, y, t) = \sum_{i=0}^{n} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)} = u_0(x, y) + \sum_{i=1}^{n} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}. \tag{4}$$

□

# Description du GMMSFT

En appliquant l'opérateur $D_t^\alpha$ sur l'équation (4), on obtient la formule

$$D_t^\alpha u_n(x,y,t) = \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}. \qquad (5)$$

Ensuite, nous substituons à la fois(4) et (5) dans (1). On trouve la relation suivantes

$$\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^2 \\ & -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^2 - F\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right). \end{aligned}$$

# Description du GMMSFT

Nous suivons le même analogue utilisé pour obtenir les coefficients de la série de Taylor. En particulier, à calculer la fonction$u_n(x,y)$, $n = 1, 2, 3, ...$,nous devons résoudre ce qui suit

$$D_t^{(n-1)\alpha}\left\{G\left(x,y,t,\alpha,n\right)\right\}\downarrow_{t=0}=0,$$

où

$$\begin{aligned} G\left(x,y,t,\alpha,n\right) &= \sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right)^2 \\ & -\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right) \\ & -F\left(\sum_{i=0}^{n} u_i(x,y)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)}\right). \end{aligned}$$

Maintenant, on calcule les premiers termes de la suite $\{u_n(x,y)\}$.
Pour calculer $u_1(x,y)$, on considère $G(x,y,t,\alpha,1)$ et on résout

$$G(x,y,0,\alpha,1)=0$$

Nous avons

$$u_1(x,y)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_0^2(x,y)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}u_0^2(x,y)+F(u_0(x,y))$$

Pour calculer $u_2(x,y)$, on considère $G(x,y,t,\alpha,2)$ et on résout

$$D_t^\alpha\left\{G\left(x,y,t,\alpha,2\right)\right\}\downarrow_{t=0}=0,$$

Nous avons

$$
\begin{aligned}
u_2(x,y) &= 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[u_0(x,y)u_1(x,y)\right] + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[u_0(x,y)u_1(x,y)\right] \\
&\quad + u_1(x,y)F'(u_0(x,y))
\end{aligned}
$$

Pour calculer $u_3(x,y)$, on considère $G(x,y,t,\alpha,3)$ et on résout $D_t^{2\alpha}\left\{G\left(x,y,t,\alpha,3\right)\right\}\downarrow_{t=0}=0$,Nous avons

$$
\begin{aligned}
u_3(x,y) &= 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[3u_1(x,y)u_2(x,y) + u_0(x,y)u_3(x,y)\right] \\
&\quad + 2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[3u_1(x,y)u_2(x,y) + u_0(x,y)u_3(x,y)\right] \\
&\quad + u_2(x,y)F'(u_0(x,y)) + u_1^2(x,y)F''(u_0(x,y)).
\end{aligned}
$$

etc.

# Description du GMMSFT

En général, pour obtenir la fonction de coefficient $u_k(x;y)$on résout

$$D_t^{(k-1)\alpha}\left\{G\left(x,y,t,\alpha,k\right)\right\}\downarrow_{t=0}=0,$$

Enfin, la solution des équations (1) et (2), peut être exprimée par

$$\begin{aligned} u\left(x,y,t\right) &= \lim u_n\left(x,y,t\right) \\ &= \lim \sum_{i=0}^{n} u_i\left(x,y\right)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u_i\left(x,y\right)\frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha+1)} \end{aligned}$$

La preuve est complète.

# Description du (MPH)

On considère l'équation de population biologique fractionnaire de la forme (1) avec la condition initiale (2) et $F(u) = hu^a \left(1 - ru^b\right)$ .
Alors, par la MPH des équations (1) et (2) selon cette méthode, on construit l'homotopie simple suivante

$$(1-p)\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha}\right) + p\left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} - hu^a\left(1 - ru^b\right)\right] = 0, \tag{6}$$

où

$$\left(\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha}\right) + p\left[\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} - hu^a\left(1 - ru^b\right)\right] = 0 \tag{7}$$

où $u_0$ est une première approximation de léquation (1) , et $p \in [0, 1]$ est un paramètre d'intégration. Dans le cas $p = 0$,( 7) est une équation différentielle fractionnaire, $\frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha} = 0$, qui est facile à résoudre ; et lorsque $p = 1$, (7) s'avère être celui d'origine (1) .

# Description du (MPH)

Les bases l'hypothèse est que les solutions peuvent être écrites sous la forme d'une série de puissances en $p$

$$u = u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + p^3 u_3 + ...., \tag{8}$$

les solutions approchées des équations originales peuvent être obtenues en posant p = 1,c'est àdire, $u = \lim_{p \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ....,$ transformer (8) dans (7) et comparer des coefficients de termes de puissances de p identiques,
on a

$$\begin{aligned}
p^0 &: \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha} = 0 \\
p^1 &: \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial y^2} - hu_0^a \left(1 - ru_0^b\right) = 0, \\
p^2 &: \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 2u_0 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 2u_0 u_1}{\partial y^2} - hau_0^{a-1} u_1 + hr\,(a+b)\, u_0^{a+b-1} = 0,
\end{aligned}$$

# Transformation différentielle réduite fractionnaire

# Transformation différentielle réduite fractionnaire

## Definition

Si $u(x;t)$est analytique et continuellement différentiable par rapport ' a la variable d'espace $x$ et en temps $t$, alors la transformation différentielle réduite fractionnairede $u(x;t)$ est donnee par

$$U_k(x) = \frac{1}{\Gamma(k\alpha + 1)} \left[ \frac{\partial^k}{\partial t^k} u(x,t) \right]_{t=t_0} \tag{9}$$

ou $u(x;t)$est la fonction originale et $U_k(x)$ est la fonction transforme et $\alpha$ est un parametre decrivant l'ordre de la dérivee fractionnaire en temps

# Transformation différentielle réduite fractionnaire

## Definition

[Y. Keskin, (2009)]: La transformation différentielle réduite fractionnaire inverse de $U_x(k)$ est définie par

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x)(t-t_0)^{k\alpha}. \tag{10}$$

En combinant les équations (9) et (10), nous avons

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x,t)\right]_{t=t_0} (t-t_0)^{k\alpha}. \tag{11}$$

En particulier, pour $t_0 = 0$, l'équation (11) devient

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(k\alpha+1)} \left[\frac{\partial^{k\alpha}}{\partial t^{k\alpha}} u(x,t)\right]_{t=0} t^{k\alpha}. \tag{12}$$

# Transformation différentielle réduite fractionnaire

## Theorem

*Soient* $U_k(x)$,$V_k(x)$ *et* $W_k(x)$ *les transformations différentielles réduites fractionnaires des fonctions* $u(x;t)$, $v(x;t)$ *et* $w(x;t)$ *respectivement.*
*1) Si* $w(x,t) = \lambda u(x,t) + \mu v(x,t)$ *alors*
$W_k(x) = \lambda U_k(x) + \mu V_k(x), \lambda, \mu \in R$
*2) Si* $w(x,t) = u(x,t)v(x,t)$*; alors*$W_k(x) = \sum_{r=0}^{k} U_r(x)V_{k-r}(x)$
*4) Si* $w(x,t) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}u(x,t)$ *, alors* $W_k(x) = \frac{\partial^n}{\partial x^n}U_k(x)$
*5) Si* $w(x;t) = D_t^{n\alpha}u(x;t)$*est l'operateur de dérivee fractionnaire en temps de Caputo de la fonction* $u(x,t)$ *d'ordre* $n-1 < n\alpha \leq n$*; alors sa transformation différentielle réduite fractionnaire est donnée par*

$$W_k(x) = \frac{\Gamma((k+n)\alpha+1)}{\Gamma(k\alpha+1)}U_{k+n}(x), n = 1, 2, ...$$

*ou* $U_{k+n}(x)$ *est la fonction transformee differentielle de la fonction* $u(x,t)$

# Applications numériques

**Exemple 1**: On considère l'équation de population biologique fractionnaire suivante

$$D_t^{\alpha} u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + hu, \tag{13}$$

avec la condition initiale

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sqrt{xy}, \tag{14}$$

En appliquant les étapes impliquées dans le GMMSFT comme présenté dans la section 2, nous avons la solution de les équations (13) et (14) sous la forme

$$u(x, y, t) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i(x, y) \frac{t^{i\alpha}}{\Gamma(i\alpha + 1)}.$$

# Applications numériques

et

$$u_i(x,y) = h^i\sqrt{xy}, \text{pour } i = 0,1,2,3,\ldots$$

Alors, la solution des équations (13) et (14), peut être exprimée par

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sqrt{xy}\left(1 + h\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} + h^2\frac{t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)} + \ldots\right) \\ &= \sqrt{xy}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(ht^{\alpha})^i}{\Gamma(i\alpha+1)} = \sqrt{xy}E_{\alpha}(ht^{\alpha}) \end{aligned} \quad (15)$$

où $E_{\alpha}(ht^{\alpha})$ est la fonction de Mittag-Leffler definie par $E_{\alpha}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\Gamma(n\alpha+1)}$ .En prenant $\alpha = 1$dans (16), nous avons

$$\begin{aligned} u(x;y;t) &= \sqrt{xy}\left(1 + ht + \frac{(ht)^2}{2!} + \frac{(ht)^3}{3!} + \ldots\right) \\ &= \sqrt{xy}exp(ht) \end{aligned}$$

**Exemple 2**: On considère l'équation de population biologique fractionnaire suivante

$$D_t^{\alpha} u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + hu, \tag{16}$$

avec la condition initiale

$$u_0 = \sqrt{xy}, \tag{17}$$

Alors, par la MPH des équations (16) et (17) selon cette méthode, on construit l'homotopie simple suivante

$$\left(\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - \frac{\partial^{\alpha} u_0}{\partial t^{\alpha}}\right) + p\left[\frac{\partial^{\alpha} u}{\partial t^{\alpha}} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} - hu\right] = 0 \tag{18}$$

transformer (8) dans (18) et comparer des coefficients de termes de puissances de p identiques,
on a

$$
\begin{aligned}
p^0 \quad &: \quad \frac{\partial^\alpha u_0}{\partial t^\alpha} = 0 \\
p^1 \quad &: \quad \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u_0^2}{\partial y^2} - hu_0 = 0, \\
p^2 \quad &: \quad \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 2u_0 u_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 2u_0 u_1}{\partial y^2} - hu_1 = 0,
\end{aligned}
\tag{19}
$$

En appliquant l'opérateur fractionnaire de Riemann-Liouville $I^\alpha$ , qui est l'opérateur inverse de la dérivée de Caputo $D^\alpha$, des deux côtés de (19) la solution est

# Applications numériques

$$\begin{aligned}
u_0 &= \sqrt{xy}, \\
u_1 &= \frac{ht^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}\sqrt{xy}, \\
u_2 &= \frac{h^2 t^{2\alpha}}{\Gamma(2\alpha+1)}\sqrt{xy}, \\
&\ \ \vdots \\
u_n &= \frac{h^n t^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha+1)}\sqrt{xy},
\end{aligned}$$

Alors la solution approchée sous forme de série est

$$u(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sqrt{xy}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(ht^{\alpha})^n}{\Gamma(n\alpha+1)} = \sqrt{xy}\,E_{\alpha}(ht^{\alpha}) \qquad (20)$$

où $E_\alpha(ht^\alpha)$ est la fonction de Mittag-Leffler definie par

$$E_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(n\alpha + 1)}$$

En prenant $\alpha = 1$ dans (20), nous avons

$$\begin{aligned} u(x;y;t) &= \sqrt{xy} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ht)^n}{\Gamma(n+1)} \\ &= \sqrt{xy} exp(ht) \end{aligned}$$

**Exemple 3**: On considère l'équation de population biologique fractionnaire suivante

$$D_t^{\alpha} u = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^2}{\partial y^2} + hu, \tag{21}$$

avec la condition initiale

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y) = \sqrt{xy}, \tag{22}$$

Selon la description du la MTDRF présentée dans la section 4, nous avons la formule de relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(k\alpha + \alpha + 1)}{\Gamma(k\alpha + 1)} U_{k+1}(x, y) \quad = \quad & \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \sum_{r=0}^{k} U_r(x, y) U_{k-r}(x, y) \right) \\ & + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \sum_{r=0}^{k} U_r(x, y) U_{k-r}(x, y) \right) + hU_k(x, y \end{aligned}$$

# Applications numériques

en utilisant le MTDRF à la condition initiale (22) , on obtient

$$U_0(x, y) = \sqrt{xy} \tag{23}$$

en utilisant eq (22) dans eq (23) nous obtenons les valeurs suivantes

$$\begin{aligned}
U_1(x, y) &= \frac{h}{\Gamma(\alpha + 1)}\sqrt{xy} \\
U_2(x, y) &= \frac{h^2}{\Gamma(2\alpha + 1)}\sqrt{xy} \\
U_1(x, y) &= \frac{h^3}{\Gamma(3\alpha + 1)}\sqrt{xy} \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
U_k(x, y) &= \frac{h^k}{\Gamma(k\alpha + 1)}\sqrt{xy}
\end{aligned}$$

en utilisant la transformée inverse différentielle de $U_k(x,y)$ . on a

$$\begin{aligned} u(x,y,t) &= \sum_{k=0}^{\infty} U_k(x,y) t^{k\alpha} = U_0(x,y) + U_1(x,y) t^{\alpha} + U_2(x,y) t^{2\alpha} + U_3( \\ &= \sqrt{xy}\left(1 + \frac{h}{\Gamma(\alpha+1)} t^{\alpha} + \frac{h^2}{\Gamma(2\alpha+1)} t^{2\alpha} + \ldots + \frac{h^k}{\Gamma(k\alpha+1)} t^{k\alpha}\right. \\ &= \sqrt{xy}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ht^{\alpha})^k}{\Gamma(k\alpha+1)}\right] \end{aligned}$$

$$u(x,y,t) = \sqrt{xy}\, E_{\alpha}(ht^{\alpha}) \tag{24}$$

où $E_{\alpha}(ht^{\alpha})$ est la fonction de Mittag-Leffler
En prenant $\alpha = 1$ dans (24), nous avons

$$u(x;y;t) = \sqrt{xy} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ht)^n}{\Gamma(n+1)} = \sqrt{xy}\, exp(ht)$$

# Conclusion

Les résultats obtenus révèlent que les méthodes proposée est un outil très eficace et simple pour résoudre ce type déquations , nous pouvons conclure que l'équation de population biologique fractionnaire peut être résolue de plusieurs méthode telles que : la méthode de perturbation par homotopie (MPH) et généralisé modifié Méthode des séries fractionnaires de Taylor (GMMSFT) et méthode de transformation différentielle réduite fractionnaire (MTDRF) .
Et attendez une nouvelle méthode de résoudre cette équation dès ma préparation sous encadrement Dr Ali Khalouta

# Références

**A. Khalouta,** A new numerical technique for solving Caputo time-fractional biological population equation, AIMS Mathematics, (2019), 1307–1319.

**Y.Liui** , Homotopy perturbation method to fractional biological population equation , Fractional Differential Calculs , (2011), 177–124.

**K.Vineet** , Two dimensional time fractional ordre biological

population model and its analytical solotion , Egyptian Journal Of Basis And Applied Science, (2011), 71–76.

Merci pour votre attention