Séries d'exercices

Dans cette partie, nous exposons une série d'exercices d'application dans le but d'enrichir le cours.

3.4 Espaces L^p

Exercice 3.4.1 ***Inégalités de Young et de Hölder***

1. *Soit* $a, b \geq 0$ *et soit* $p, q \in (1, +\infty)$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *(on dit que* p *et* q *sont conjugués au sens de Young). Montrer l'inégalité de Young :*

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + b^q\frac{1}{q}.$$

Idée : Considérer la fonction $\theta : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *définie par* $\theta(a) = \frac{1}{p}a^p + b^q\frac{1}{q} - ab$.

2. *Soit* $p, q \in (1, +\infty)$ *tel que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *et* $f \in L^p(\mu)$, $g \in L^q(\mu)$

   a) *En utilisant l'inégalité de Young, montrer que pour tout* $\lambda > 0$

$$\int_\Omega |fg| d\mu \leq \frac{\lambda^p}{p}\int_\Omega |f|^p d\mu + \frac{\lambda^{-q}}{q}\int_\Omega |g|^q d\mu.$$

   b) *Optimiser cette inégalité par rapport à* λ *et montrer l'inégalité de Hölder :*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

   c) *Cette inégalité est-elle vraie pour* $p = 1$ *et* $q = \infty$ *?*

3. *Soient* p *et* p' *dans* $[1, +\infty[$ *(pas nécessairement conjugués). Montrer que si* f *appartient à* $L^p(\mu) \cap L^{p'}(\mu)$*, alors* f *appartient à* $L^r(\mu)$ *pour tout* r *compris entre* p *et* p'.

4. *Montrer que si μ est une mesure finie alors*

$$L^\infty \subset \bigcap_{p\geq 1} L^p.$$

et, pour tout f,

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

5. *Montre que si $f \in L^p$, $g \in L^q$ avec $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$, alors $fg \in L^r$ et*

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

6. *Soient p et q dans $[1,+\infty[$ avec $q<p$ (pas nécessairement conjugués). Montrer que si $f \in L^p \cap L^q$, alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [q,p]$, et on a :*

$$\|f\|_r \leq \|f\|_q^\alpha \|f\|_p^{1-\alpha},$$

ou $\alpha \in [0,1]$ est définit par $\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{q}+\frac{1-\alpha}{p}$.

Exercice 3.4.2 ***Différentiabilité des normes*** $\|.\|_p$

Soient f et g deux fonctions de $L^p(\mu)$ avec $1<p<+\infty$. Montrer que la fonction N : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$N(t)=\int_\Omega |f(x)+t\cdot g(x)|^p d\mu,$$

est différentiable et que sa dérivée en $t=0$ est donnée par :

$$\frac{dN}{dt}_{|t=0} = p\int_\Omega |f(x)|^{p-2} f(x) g(x) d\mu,$$

où par convention $|f(x)|^{p-2}f(x)=0$ lorsque $f=0$.

Exercice 3.4.3 ***Inégalité de Hardy***

Soit $p \in]1,+\infty[$, soit $f \in L^p$. Pour $x \in]0,+\infty[$, on pose

$$F(x)=\frac{1}{x}\int_0^{+\infty} f(t)\mathbb{I}_{]0,x[}dt.$$

1. *On suppose que $f \in C_c(]0,+\infty[)$ (c'est-à-dire que f est continue et à support compact dans $]0,+\infty[$).*

   a) *Montrer que $F \in C^1(]0,\infty[) \cap L^p$.*

b) *Montrer que* $xF'(x) = -F(x) + f(x)$ *pour tout* $x > 0$.

2. *On suppose, dans cette question, que* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in]0, \infty[$. *Montrer que*

$$\int_0^\infty F^p(x)dx = \frac{p}{p-1}\int_0^\infty F^{p-1}(x)f(x)dx.$$

3. *Montre que*

$$\|F\|_p \leq \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

Exercice 3.4.4 ***Relations entre les espaces*** L^p

Soient la mesure de Lebesgue est finie ($\mu(\Omega) < +\infty$) *et* $1 \leq p < +\infty$.

Montrer que si $q \leq p$, *alors* $L^p(\Omega) \subset L^q(\Omega)$. *En particulier, pour* $1 < q < 2 < p < \infty$, *on a :*

$$L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset L^q(\Omega) \subset L^1(\Omega).$$

3.5 Transformation de Fourier

Exercice 3.5.1 *Déterminer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :*

1. $t \mapsto \mathbb{I}_{[-T,T]}(t)$
2. $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$
3. $t \mapsto \exp(\frac{-|t|}{T})$
4. $t \mapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2}$

Exercice 3.5.2 *Soit* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *intégrable et* $\widehat{f}$ *sa transformée de Fourier. Pour tout* $T > 0$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on définit*

$$f_T(t) = \int_{-T}^{T}\Big(1 - \frac{|x|}{T}\Big)e^{2i\pi tx}\widehat{f}(x)dx.$$

1. *Démontrer que*

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi^2 T}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2(\pi T s)}{s^2}(f(t+s) + f(t-s))ds.$$

2. *Calculer la valeur de*

$$I = \int_0^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}du.$$

3. *Supposons f bornée. Montrer qu'en tout point $t \in \mathbb{R}$ ou $f(t^+)$ et $f(t^-)$ existent, on a :*

$$\lim_{T \to +\infty} f_T(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-)).$$

Exercice 3.5.3 *Soit l'équation intégrale, pour $0 < a < b$ et $f \in L^1(\mathbb{R})$:*

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{(x-t)^2 + a^2} dt = \frac{1}{x^2 + b^2}. \tag{3.3}$$

Exprimer (3.3) sous forme d'une équation de convolution, déterminer $\widehat{f}(\nu)$ et en déduire $f(t)$.

Exercice 3.5.4 *Soit $f(t) = \exp(-\pi x^2)$. Déterminer $(\widehat{f}(\nu))'$. En déduire une équation différentielle en $\widehat{f}$ que l'on résoudra. [On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \exp(-\pi x^2) dx = 1$].*

Exercice 3.5.5 *Soient $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, on note $\widehat{f}$ la transfomée de Fourier définie par*

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (y,x)} dx,$$

ou $(.,.)$ désigne le produit scalaire de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

1. $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x) g(x) dx.$
2. $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}.$

Exercice 3.5.6 *On rappelle que la tronsformée de Fourier de la fonction $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^2$ est la fonction*

$$\widehat{f}(\alpha) = \pi(1 - \pi|\alpha|)\mathbb{I}_{[\frac{-1}{\pi}, \frac{1}{\pi}]}(\alpha).$$

On en déduit par l'égalité de Parseval Plancherel la valeur de l'intégral I avec

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 dx.$$

Exercice 3.5.7 *Résoudre l'équation de Laplace $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$ ou $y > 0$, avec $\frac{\partial \phi}{\partial x} \to 0$ et $\phi \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to +\infty$, $\phi(x,0) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et $\phi(x,0) = 0$ pour $|x| > 1$. (Utiliser la transformée de Fourier par rapport à x).*

3.6 Transformation de Laplace

Exercice 3.6.1 *Calculer les transformées de Laplace des fonctions temporelles suivantes :*

1. $f_1(t) = \cos^2 t = \frac{1}{2}[1 + \cos(2t)]$
2. $f_2(t) = te^{-t} \cos t$
3. $f_3(t) = \cosh at$
4. $f_4(t) = \sinh at$
5. $f_5(t) = t^n$, $n > 1$

Exercice 3.6.2 *Trouver la transformée de Laplace inverse des fonctions suivantes :*

a) $F(p) = \frac{2p+1}{p^2+5p+6}$

b) $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p^2(p-1)}$

c) $\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p(p^2+\omega^2)}$

d) $\mathcal{L}(f) = e^{-\pi p}\frac{p}{p^2+4}$

Exercice 3.6.3 *Résoudre les problèmes aux valeurs initiales :*

1. $y' + y = 1$ *avec* $y(0) = 0$
2. $y'' + 2y' + 5y = 0$ *avec* $y(0) = 2$, $y'(0) = -4$
3. $y'' + 3y = \sin(t)$ *avec* $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$
4. $y''' + 5y'' + 6y = 0$ *avec* $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 7$

Exercice 3.6.4 *Résoudre l'équation intégrale*

$$y(t) = t + \int_0^t y(\tau) \sin(t - \tau) d\tau.$$

Exercice 3.6.5 *En utilisant les théorèmes des valeurs initiales et finales, calculer* $s(t \to 0^+)$ *et* $s(t \to \infty)$ *pour les fonctions suivantes :*

1. $S(p) = \frac{p^2+2p+4}{p^3+3p^2+2p}$
2. $S(p) = \frac{p^3+2p^2+6p+8}{p^3+4p}$