

3.3 Existence et unicite de la solution

Ce section constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...). On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites d'équation différentielle d'ordre fractionnaire.

3.3.1 Quelques théorèmes de point fixe

Définition 3.3.1 Soit (E, d) un espace métrique complet et $F : E \rightarrow E$ une application continue.

- i) On dit que $x \in E$ est un point fixe de F si $f(u) = u$.
- ii) On dit que F est contractante si elle est lipschitzienne de rapport $0 < L < 1$, c'est-à-dire s'il existe $0 < L < 1$, tel que

$$\forall u, v \in E, d(F(u), F(v)) \leq Ld(u, v), 0 < L < 1.$$

Définition 3.3.2 (Complètement continue)

Soient X et Y deux espaces de Banach et $F : X \rightarrow Y$ une application définie de X à valeurs dans F . On dit que F est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de X en un ensemble relativement compact dans Y . F est dite compacte si $F(X)$ est relativement compact dans Y .

Théorème 3.3.1 (Ascoli-Arzelà)

Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compact dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et } f \in A.$$

- ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et } f \in A.$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

Théorème 3.3.2 (Banach)

Soient X un espace de Banach, et un opérateur contractant $F : X \rightarrow X$. Alors F admet un point fixe unique.

i.e $\exists! u \in X$ tel que $Fu = u$.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énoncer est celui de Schauder.

Théorème 3.3.3 (Schauder)

Soit $(E; d)$ un espace métrique complet, et X une partie convexe et fermée de E , et soit $F : X \rightarrow X$ une application telle que l'ensemble $\{Fu : u \in X\}$ est relativement compacte dans E . Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.4 (Leray-Schauder Alternative) Soit X un espace de Banach, C une sous-ensemble convexe et fermée dans X , U est un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. Supposons que $F : \bar{U} \rightarrow C$ un opérateur continu et compact ($F(\bar{U})$ est relativement compact de C).

Alors

- (i) F admet un point fixe de $\bar{U}$, ou
- (ii) Il existe un $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec $u = \lambda F(u)$.

Théorème 3.3.5 (Schaefer)

Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda Fu = u, \lambda \in]0, 1[\},$$

est borné, alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 3.3.6 (Krasnoselskii)

Soit M un sous ensemble fermé et borné, convexe et non vide d'un espace de Banach X .

Soient A, B deux opérateurs tels que

- (a) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$.
- (b) A est compact et continu.
- (c) B est un opérateur contractante.

Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

3.3.2 Problème de Cauchy d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

On va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy pour des equation différentielles d'ordre fractionnaire (on utilise la dérivée au sens de Caputo) et on a le problème sous la forme suivant :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}, \quad (3.17)$$

tell que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Lemme 3.3.1 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}y(t) = h(t), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ y(0) = y_0, & y_0 \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (3.18)$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx. \quad (3.19)$$

Preuve. On applique l'operateur $\mathcal{I}^\alpha$ à l'équation (3.18) on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\alpha {}^C\mathcal{D}^\alpha y &= \mathcal{I}^\alpha f(t) \Rightarrow y(t) + c_0 = \mathcal{I}^\alpha h(t) \\ &\Rightarrow y(t) = \mathcal{I}^\alpha h(t) - c_0. \end{aligned}$$

La conditions initial donne

$$y(0) = (\mathcal{I}^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0 \Rightarrow c_0 = -y_0.$$

Alors

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{I}^\alpha h(t) - (-y_0) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx + y_0. \end{aligned}$$

Inversment on a :

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) dx \\ &= \mathcal{I}^\alpha h(t) + y_0, \end{aligned}$$

on applique ${}^C\mathcal{D}^\alpha$ à l'equation intégrale (3.19),

$$\begin{aligned} {}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) &= {}^C\mathcal{D}^\alpha(\mathcal{I}^\alpha h)(t) + {}^C\mathcal{D}^\alpha(y_0) \\ &= h(t) \end{aligned}$$

donc il rest vérifier que $y(0) = y_0$,

$$\begin{aligned} y(0) &= \mathcal{I}^\alpha h(0) + y_0 = 0 + y_0 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.18). ■

Théorème 3.3.7 Soit $0 < \alpha < 1$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et vérifie la condition de Lipschitz suivant :

$$|f(t, y) - f(t, z)| \leq k |y - z|, \quad \forall t \in [0, T], \text{ et } y, z \in \mathbb{R}.$$

Si

$$\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1,$$

alors il existe une solution unique de problème de Cauchy (3.17).

Preuve. On utilise le théorème du point fixe de Banach 3.3.2.

On transforme le problème (3.17) en un problème au point fixe (Lemme 3.3.1), en considérant l'opérateur :

$$\begin{aligned} F : C([0, T], \mathbb{R}) &\rightarrow C([0, T], \mathbb{R}) \\ y &\rightarrow F(y)(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds. \end{aligned}$$

où $C([0, T], \mathbb{R})$ l'espace de Banach des fonctions continues y définies de $[0, T]$ dans $\mathbb{R}$; muni de la norme

$$\|y\| = \sup_{t \in [0, T]} |y(t)|.$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (3.17).

F est bien défini, en effet : si $y(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$, alors $Fy(t) \in C([0, T], \mathbb{R})$.

Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une contraction, en

effet si $y_1, y_2 \in C([0, T], \mathbb{R})$, $t \in [0, T]$, en utilisant la condition de Lipschitz on obtient::

$$\begin{aligned}
 |Fy_1 - Fy_2| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s)))(t-s)^{\alpha-1} ds \right| \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (|f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))| (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)| (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{k}{\Gamma(\alpha)} \|y_1 - y_2\| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \|y_1 - y_2\|
 \end{aligned}$$

En vertu de $\frac{kT^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} < 1$, on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (3.17). ■

3.3.3 Problème aux Limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire

Dans cette partie on va étudier l'existence et l'unicité de la solution d'un problème aux limites d'equation différentielle d'ordre fractionnaire sous formes :

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}y(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \quad (3.20)$$

tell que $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et a, b des constant réelles ($a + b \neq 0$).

Définition 3.3.3 *On dit que une fonction $y \in C^1([0, T], \mathbb{R})$, est solution du problème (3, 20) si y vérifier l'équation ${}^C\mathcal{D}^\alpha y(t) = f(t, y(t))$, sur A et avec la condition $ay(0) + by(T) = c$.*

Lemme 3.3.2 *Soit $0 < \alpha < 1$ et soit $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Une fonction y est une solution de problème de Cauchy*

$$\begin{cases} {}^C\mathcal{D}y(t) = h(t), & t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1 \\ ay(0) + by(T) = c \end{cases}, \quad (3.21)$$

si et seulement si elle est la solution de l'equation intégrale:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right]. \quad (3.22)$$

Preuve. On applique l'opérateur $\mathcal{I}^\alpha$, à l'équation (3.21),

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^\alpha {}^C \mathcal{D}^\alpha y &= \mathcal{I}^\alpha f(t) \Rightarrow y(t) + c_0 = \mathcal{I}^\alpha h(t) \\ &\Rightarrow y(t) = \mathcal{I}^\alpha h(t) - c_0. \end{aligned}$$

D'après les cnditions aux limites on a :

$$\begin{aligned} y(0) &= (\mathcal{I}^\alpha h)(0) - c_0 = -c_0. \\ y(T) &= (\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c_0. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} ay(0) + by(T) &= -ac_0 + b[\mathcal{I}^\alpha h(T) - c_0] = c \\ &\Rightarrow (a+b)c_0 = b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c \\ &\Rightarrow c_0 = \frac{1}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c], \quad a+b \neq 0 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{I}^\alpha h(t) - \frac{1}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} h(s) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} h(s) ds - c \right]. \end{aligned}$$

Inversment on a :

$$y(t) = (\mathcal{I}^\alpha h)(t) - \frac{1}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c],$$

on applique ${}^C \mathcal{D}^\alpha$ à l'equation intégrale (3.22),

$$\begin{aligned} {}^C \mathcal{D}^\alpha y(t) &= {}^C \mathcal{D}^\alpha (\mathcal{I}^\alpha h)(t) - {}^C \mathcal{D}^\alpha \left[\frac{1}{a+b} (b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c) \right] \\ &= h(t). \end{aligned}$$

Il rest que de vérifier $ay(0) + by(T) = c$.

$$\begin{cases} y(0) = (\mathcal{I}^\alpha h)(0) - \frac{1}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \\ y(T) = (\mathcal{I}^\alpha h)(T) - \frac{1}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \end{cases},$$

donc

$$\begin{aligned}
 ay(0) + by(T) &= \frac{-a}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] + b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - \frac{b}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] \\
 &= -\frac{a+b}{a+b} [b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) - c] + b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) \\
 &= -b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) + c + b(\mathcal{I}^\alpha h)(T) \\
 &= c.
 \end{aligned}$$

Alors y est solution du problème (3.21).

■

Théorème 3.3.8 Soit $0 < \alpha < 1$ et $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et vérifie la condition de Lipschitz suivant :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k(x - y), \quad \forall t \in [0, T], \text{ et } x, y \in \mathbb{R}$$

si

$$\frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha + 1)} < 1, \quad (3.23)$$

Alors le problème (2, 12) admet une solution unique sur $[0, T]$,

Preuve. On transforme le problème (3, 20) en un problème de point fixe. Considérons l'opérateur

$$F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$$

défini par :

$$F(y)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right]. \quad (3.24)$$

Donc les points fixes de F sont les solutions du problème (3.20) on a :

F est bien défini, en effet : si $y \in C([0, T], \mathbb{R})$ alors $(Fy) \in C([0, T], \mathbb{R})$,

donc si montrer F est contraction alors F admet un point fixe en effet si $x, y \in C([0, T], \mathbb{R})$

alors $\forall t \in [0, T]$, on a :

$$\begin{aligned}
 |F(x)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\leq \frac{k \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|k \|x-y\|_\infty}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\|F(x) - F(y)\|_\infty \leq \frac{kT^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha\Gamma(\alpha)} \|x-y\|_\infty.$$

En vertu de (3.23), on déduit que F est une contraction et d'après le théorème de Banach F admet un seul point fixe et ce point est la solution du problème (3, 20) . ■

On utilisant le théorème du point fixe de Schaefer pour deuxième résultat de la solution du (3, 20).

Théorème 3.3.9 *Soit les deux conditions suivantes :*

(H1) *La fonction $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue.*

(H2) *Il existe une constante $M > 0$ telle que :*

$$|f(t, x)| \leq M, \quad \forall t \in [0, T], \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Alors, le problème (3, 20) admet au moins une solution sur $[0, T]$.

Preuve. On va utiliser le théorème du point fixe de Schaefer pour montrer que F défini par (3.24) admet un point fixe. La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Étape 1. F est continue.

Soit $\{y_n\}$ une suite dans $C([0, T], \mathbb{R})$ convergent pour $\|\cdot\|_\infty$ vers y . C-à-d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n - y\|_\infty = 0.$$

Il faut montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|F(y_n) - F(y)\|_\infty = 0$, $\forall t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
 |F(y_n)(t) - F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sup_{x \in [0, T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} \sup_{x \in [0, T]} |f(s, y_n(s)) - f(s, y(s))| ds \\
 &\leq \frac{\|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty}{\Gamma(\alpha)} \left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|b|}{|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \right] \\
 &\leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\alpha \Gamma(\alpha)} \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty.
 \end{aligned}$$

Puisque f est continue, alors

$$\|F(y_n)(t) - F(y)(t)\| \leq \frac{T^\alpha \left(1 + \frac{|b|}{|a+b|}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} \|f(\cdot, y_n(\cdot)) - f(\cdot, y(\cdot))\|_\infty \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

d'où la continuité de F .

Etape 2. L'image de tout ensemble borné par F est un ensemble borné dans $C([0, T], \mathbb{R})$, en effet suffit de montrer que pour tout $r > 0$, il existe une constante $L > 0$: pour tout $y \in B_r$,

$$B_r = \{y \in C([0, T], \mathbb{R}) : \|y\|_\infty \leq r\}$$

on a $\|F(y)\|_\infty \leq L$.

Par (H2) on a pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 |F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
 &\leq \frac{M}{\alpha \Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha \Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha \Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha \Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = L.$$

par suite $F(B_r)$ est borné.

Etape 3. L'image de tout borné par F est un ensemble équicontinu de $C([0, T], \mathbb{R})$.

Soit $t_1, t_2 \in (0, T]$, $t_1 < t_2$, B_r un ensemble borné de $C([0, T], \mathbb{R})$ et soit $y \in B_r$,

Alors :

$$\begin{aligned}
 |F(y)(t_2 - F(y)(t_1))| &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{t_1} [(t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}] ds \\
 &\quad + \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} [(t_2 - t_1)^\alpha + t_1^\alpha - t_2^\alpha] + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_2 - t_1)^\alpha + \frac{M}{\Gamma(\alpha+1)} (t_1^\alpha - t_2^\alpha),
 \end{aligned}$$

quand $t_1 \rightarrow t_2$, le membre droit de l'inégalité précédent tend vers 0, d'où la continuité de F d'après l'étape 2, et 3, et le théorème d'Ascoli-Arzelà, $F(B_r)$ est relativement compact pour tout borné B_r . **C-à-d** F est complètement continu et par l'étape 1, F est continu par conséquent, $F : C([0, T], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, T], \mathbb{R})$ est continu et complètement continu.

Etape 4.

Donc il reste à montrer que $\mathcal{E} = \{y \in C(A, \mathbb{R}) : y = \lambda F(y)\}$ tel que $0 < \lambda < 1$, est borné.

Soit $y \in \mathcal{E} \Rightarrow y = \lambda F(y)$, donc $\forall t \in [0, T]$, on a :

$$y(t) = \lambda \left[\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - \frac{1}{a+b} \left[\frac{b}{\Gamma(\alpha)} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} f(s, y(s)) ds - c \right] \right],$$

et d'après (H2), et $\forall t \in [0, T]$ on a :

$$\begin{aligned}
 |F(y)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds \\
 &\quad + \frac{|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} |f(s, y(s))| ds + \frac{|c|}{|a+b|} \\
 &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds + \frac{|c|}{|a+b|} + \frac{M|b|}{\Gamma(\alpha)|a+b|} \int_0^T (T-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|}.
 \end{aligned}$$

Alors

$$\|F(y)\|_\infty \leq \frac{M}{\alpha\Gamma(\alpha)} T^\alpha + \frac{M|b|}{\alpha\Gamma(\alpha)|a+b|} T^\alpha + \frac{|c|}{|a+b|} = R.$$

Cela $\mathcal{E}$ montre que $\mathcal{F}$ est borné. alors d'après le théorème de Schaefer 3.3.5 on déduit que F admet au moins un point fixe que est une solution du problème (3.20). ■